

РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ

В. В. Трофимов, А. Т. Фоменко

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	8
Глава 1. Основные понятия римановой геометрии	17
§ 1. Геометрия римановых многообразий	17
1.1. Понятие гладкого многообразия	17
1.2. Риманова метрика и римановы многообразия	22
1.3. Конструкции римановых многообразий	25
§ 2. Геометрия многообразий аффинной связности	28
2.1. Многообразия аффинной связности	28
2.2. Тензорный анализ	29
2.3. Риманова связность	35
2.4. Параллельное перенесение и геодезические линии в пространстве аффинной связности	36
2.5. Полнота многообразий аффинной связности	42
§ 3. Кривизна многообразий аффинной связности и римановых многообразий	44
3.1. Тензор кривизны	44
3.2. Структурные уравнения	50
3.3. Главное расслоение реперов	52
3.4. Теорема Гаусса — Бонне	53
§ 4. Преобразования многообразий аффинной связности и римановых многообразий	55
4.1. Изометрии	55
4.2. Конформные преобразования	56
4.3. Аффинные преобразования многообразий аффинной связности	57
4.4. Группа голономии	59
§ 5. Однородные пространства	62
5.1. Основные определения и конструкции	62

5.2. Редуктивные однородные пространства	64
Глава 2. Геодезические линии на римановых многообразиях	66
§ 1. Вариационная теория геодезических	66
1.1. Функционал действия и функционал длины	66
1.2. Якобиевы поля	68
1.3. Гессиан функционала действия	70
1.4. Применения теоремы об индексе	75
§ 2. Периодическая задача вариационного исчисления	76
2.1. Постановка периодической задачи	76
2.2. Гессиан функционала действия	77
2.3. Некоторые приложения	79
§ 3. Теоремы сравнения	81
§ 4. Многообразия с различными ограничениями на геометрическое место минимумов	84
4.1. Геометрическое место минимумов	84
4.2. Многообразия со сферическим геометрическим местом минимумов	88
§ 5. Многообразия, на которых все геодезические замкнуты	90
§ 6. Замкнутые геодезические линии на римановых многообразиях	92
6.1. Поведение геодезических линий на некомпактных многообразиях неотрицательной и положительной кривизны	93
6.2. Существование нескольких замкнутых геодезических линий	93
6.3. Некоторые оценки для числа замкнутых геодезических на сфере и проективном пространстве	95
Глава 3. Влияние кривизны на глобальные свойства римановых многообразий	97
§ 1. Пространства постоянной кривизны	97
1.1. Общие определения и понятия	97
1.2. Вопросы классификации пространств постоянной кривизны	100
1.3. Римановы многообразия постоянной положительной кривизны	102
1.4. Римановы многообразия постоянной нулевой кривизны	106
1.5. Римановы многообразия постоянной отрицательной кривизны	111
§ 2. Римановы многообразия с ограничениями на секционную кривизну	122
2.1. Компактные римановы многообразия неотрицательной секционной кривизны	122
2.2. Некомпактные римановы многообразия неотрицательной секционной кривизны	128
2.3. Римановы многообразия отрицательной и неположительной секционной кривизны	132
2.4. Почти плоские римановы многообразия	147
§ 3. Римановы многообразия с ограничениями на кривизну Риччи	148
3.1. Теорема Мейерса	148

3.2.	Трехмерные многообразия с положительно определенной кривизной Риччи	149
3.3.	Метрики с предписанным тензором Риччи на двумерных многообразиях	152
3.4.	Метрики с предписанным тензором Риччи на многообразиях размерности ≥ 3	153
3.5.	Римановы многообразия с неотрицательной кривизной Риччи	155
3.6.	Римановы многообразия с отрицательной кривизной Риччи	156
3.7.	Многообразия с нулевым тензором Риччи	157
§ 4.	Римановы многообразия с ограничениями на скалярную кривизну	157
4.1.	Римановы многообразия отрицательной скалярной кривизны	157
4.2.	Компактные римановы многообразия с положительной скалярной кривизной	157
4.3.	Некомпактные римановы многообразия с положительной скалярной кривизной	165
4.4.	Многообразия малых размерностей	166
4.5.	Метрики заданной скалярной кривизны	168
4.6.	Функционал $\lambda_1(g)$	169
4.7.	Римановы многообразия с нулевой скалярной кривизной	172
4.8.	Конформно-эквивалентные метрики	172
§ 5.	Объем римановых многообразий и их топология	175
5.1.	Симплициальный объем и его оценки	175
5.2.	Объем гиперболических многообразий	178
5.3.	Радиус заполнения риманова многообразия	180
Глава 4.	Римановы многообразия с дополнительными структурами и их приложения	181
§ 1.	Симметрические пространства	181
1.1.	Основные конструкции	181
1.2.	Картановские модели	185
1.3.	Вопросы классификации	187
1.4.	Сопряженные точки для компактных симметрических пространств	190
1.5.	Жесткость симметрических пространств	191
§ 2.	Риманова геометрия на однородных пространствах	192
2.1.	Геометрия на G/H	192
2.2.	Теорема Амброуза — Сингера	195
2.3.	Группы изометрий левоинвариантных римановых метрик	196
2.4.	Левоинвариантные метрики Эйнштейна на группах Ли	198
§ 3.	Геометрия келеровых многообразий	203
3.1.	Основные понятия и определения	203
3.2.	Многообразия Ходжа	209
3.3.	Формы Черна келеровых многообразий	212
3.4.	Келеровы многообразия и неравенство Виртингера	214
3.5.	Многообразия отрицательной бисекционной кривизны	215
3.6.	Проблема Калаби	216
3.7.	Келеровы многообразия положительной кривизны	217

§ 4. Псевдоримановы многообразия	219
4.1. Псевдоевклидовы пространства	219
4.2. Многообразия Эйнштейна	223
4.3. Локальные погружения псевдоримановых многообразий	226
4.4. Геодезические линии на псевдоримановом многообразии	226
4.5. Оператор Дирака на псевдоримановых пространствах	227
§ 5. Классическая механика с точки зрения римановой геометрии	229
5.1. Кинематический линейный элемент	229
5.2. Линейный элемент действия	230
5.3. Брахистохроны	231
5.4. Геометрия пространства конфигураций твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки	231
§ 6. Связности Янга — Миллса	232
6.1. Геометрия и физика полей Янга — Миллса	232
6.2. Четырехмерный случай	242
6.3. Пространство модулей автодуальных связностей Янга — Миллса	245
Литература	248