

ЧАСТЬ I

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ АЛГЕБРО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 11

Глава 1. Краткий экскурс в классическую механику 11

1. Принцип Даламбера—Лагранжа	11
2. Уравнения Лагранжа второго рода	16
3. Уравнения Гамильтона	20
4. Первые интегралы дифференциальных уравнений	23
5. Динамика твердого тела	29
6. Вариационные принципы в механике	38
7. Интегральные инварианты	42
8. Канонические преобразования	48
9. Скобки Пуассона	51

Глава 2. Интегрирование канонических систем 55

10. Алгебра Ли векторных полей	55
11. Теорема Якоби	62
12. Теорема Лиувилля	67
13. Теорема Ли	70
14. Дополнительные сведения из теории групп Ли и алгебр Ли	75

Глава 3. Симплектическая геометрия в линейном пространстве 84

15. Симплектические пространства	84
16. Группы симплектических преобразований линейного пространства	86
17. Лагранжев грассманиан	95

Глава 4. Симплектическая геометрия 102

18. Симплектические многообразия	102
19. Гамильтоновы векторные поля	111
20. Геодезические потоки	118
21. Алгебра Ли функций Гамильтона	126
22. Симплектическая структура на орбитах коприсоединенного представления группы Ли	134
23. Уравнения Эйлера	139
24. Канонические преобразования	145
25. Теорема Дарбу	150
26. Вложения симплектических многообразий	153
27. Пуассоновы многообразия	157

ЧАСТЬ 2

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Глава 5. Гамильтоновы системы с симметриями. Симплектические действия групп Ли на симплектических многообразиях	163
§ 28. Вполне интегрируемые гамильтоновы системы	163
§ 29. Структура вполне интегрируемых гамильтоновых систем	166
§ 30. Некоммутативное интегрирование гамильтоновых систем	171
§ 31. Интегрируемые алгебры Ли	179
§ 32. Симплектические действия групп Ли	184
§ 33. Редукция гамильтоновых систем с симметриями и псевдогруппы Ли	190
Глава 6. Методы построения функций в инволюции на орбитах коприсоединенного представления групп Ли	197
§ 34. Метод сдвига аргумента	197
§ 35. Метод построения коммутативных наборов функций по цепочкам подалгебр	203
§ 36. Семейства функций в инволюции, связанные с согласованными скобками Пуассона	206
§ 37. Сжатия алгебр Ли	208
§ 38. Метод тензорных расширений алгебр Ли	212
§ 39. Метод сходных функций	221
§ 40. Метод R -матрицы	222
Глава 7. Полнота инволютивных наборов функций	223
§ 41. Критерий полноты	223
§ 42. Полнота семейств функций, построенных методом сдвига аргумента	229
§ 43. Функции в инволюции на симметрических алгебрах Ли	232
§ 44. Скобки Пуассона, связанные с левыми пучками	237
§ 45. Инволютивные семейства функций на полупрямых суммах	249
Глава 8. Секционные операторы	261
§ 46. Динамические системы и симплектические структуры, порождаемые секционными операторами	261
§ 47. Секционные операторы для коприсоединенного представления и вполне интегрируемые системы	267
§ 48. Основные примеры секционных операторов	274
§ 49. Бигамильтоновость уравнений Эйлера	278
Глава 9. Полная интегрируемость по Лиувиллю некоторых гамильтоновых систем на алгебрах Ли	281
§ 50. Уравнения Эйлера на алгебрах Ли, возникающие в задачах математической физики	281
§ 51. Уравнения Эйлера на полупростых алгебрах Ли	288
§ 52. Уравнения Эйлера на разрешимых алгебрах Ли	294
§ 53. Уравнения Эйлера на неразрешимых алгебрах Ли с нетривиальным радикалом	299
§ 54. Интегрируемые системы и симметрические пространства	304
§ 55. Коммутативные подалгебры универсальной обертывающей алгебры	316

ЧАСТЬ 3

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Глава 10. Качественная топологическая теория интегрируемых систем на симплектических многообразиях	325
§ 56. Элементы теории Морса	325

§ 57. Классификация трехмерных поверхностей постоянной энергии интегрируемых систем	333
§ 58. Граф, естественно связанный с интегрируемой гамильтоновой системой	346
§ 59. Новый топологический инвариант гамильтоновых систем дифференциальных уравнений, интегрируемых по Лиувиллю	349
§ 60. Построение меченого инварианта интегрируемых систем	366
§ 61. Классификация перестроек торов Лиувилля на многомерных симплектических многообразиях в окрестности бифуркационной диаграммы отображения моментов	378
<i>Глава 11. Характеристические классы</i>	396
§ 62. Характеристические классы лагранжевых слоений	396
§ 63. Обобщенные классы Маслова лагранжевых подмногообразий и симплектические связности	399
§ 64. Вполне интегрируемая гамильтонова система, торы Лиувилля которой имеют нетривиальные индексы Арнольда — Маслова	406
<i>Приложение. Нерешенные задачи</i>	411
Список литературы	416
Предметный указатель	439