

Предисловие . . . . .	5
Глава 1. Введение в дифференциальную геометрию	8
§ 1. Криволинейные системы координат. Простейшие примеры	8
1. Мотивировка . . . . .	8
2. Декартовы и криволинейные координаты . . . . .	11
3. Простейшие примеры криволинейных систем координат . . . . .	18
§ 2. Длина кривой в криволинейной системе координат . . . . .	21
1. Длина кривой в евклидовой системе координат . . . . .	21
2. Длина кривой в криволинейной системе координат . . . . .	24
3. Понятие римановой метрики в области евклидова пространства . . . . .	28
4. Индефинитные метрики . . . . .	31
§ 3. Геометрия на сфере, плоскости . . . . .	35
§ 4. Псевдосфера и геометрия Лобачевского . . . . .	43
Глава 2. Общая топология . . . . .	64
§ 1. Определения и простейшие свойства метрических и топологических пространств . . . . .	64
1. Метрические пространства . . . . .	64
2. Топологические пространства . . . . .	67
3. Непрерывные отображения . . . . .	69
§ 2. Связность. Аксиомы отделимости . . . . .	74
1. Связность . . . . .	75
2. Аксиомы отделимости . . . . .	78
§ 3. Компактные пространства . . . . .	80
1. Определение . . . . .	80
2. Свойства компактных пространств . . . . .	81
3. Метрические компактные пространства . . . . .	83
4. Операции над компактными пространствами . . . . .	84
§ 4. Функциональная отделимость. Разбиение единицы . . . . .	86
1. Функциональная отделимость . . . . .	86
2. Разбиение единицы . . . . .	89
Глава 3. Гладкие многообразия (общая теория)	91
Введение . . . . .	91
§ 1. Понятие многообразия . . . . .	92
1. Основные определения . . . . .	92
2. Функции замены координат. Определение гладкого многообразия . . . . .	97
3. Гладкие отображения. Дiffeоморфизм . . . . .	104
§ 2. Задание многообразий уравнениями . . . . .	108
§ 3. Касательные векторы. Касательное пространство . . . . .	113
1. Простейшие примеры . . . . .	113
2. Общее определение касательного вектора . . . . .	118
3. Касательное пространство $T_{P_0}(M)$ . . . . .	119
4. Пучок соприкасающихся кривых . . . . .	121
5. Производная функции по направлению . . . . .	123
6. Касательное расслоение . . . . .	129
§ 4. Подмногообразия . . . . .	131
1. Дифференциал гладкого отображения . . . . .	131
2. Локальные свойства отображений и дифференциал . . . . .	137

	3. Теорема Сарда . . . . .	140
	4. Вложение многообразий в евклидово пространство . . . . .	143
Глава 4.	Гладкие многообразия (примеры)	149
§ 1.	Теория кривых на плоскости и в трехмерном пространстве . . . . .	149
	1. Теория кривых на плоскости. Формулы Френе . . . . .	149
	2. Теория пространственных кривых. Формулы Френе . . . . .	156
§ 2.	Поверхности. Первая и вторая квадратичные формы . . . . .	164
	1. Первая квадратичная форма . . . . .	164
	2. Вторая квадратичная форма . . . . .	167
	3. Элементарная теория гладких кривых на гиперповерхности . . . . .	173
	4. Гауссова и средняя кривизны двумерных поверхностей . . . . .	182
§ 3.	Группы преобразований . . . . .	203
	1. Простейшие примеры групп преобразований . . . . .	203
	2. Матричные группы преобразований . . . . .	217
§ 4.	Динамические системы . . . . .	231
§ 5.	Классификация двумерных поверхностей . . . . .	247
	1. Многообразия с краем . . . . .	247
	2. Ориентируемые многообразия . . . . .	249
§ 6.	Римановы поверхности алгебраических функций . . . . .	269
Глава 5.	Тензорный анализ и риманова геометрия . . . . .	292
§ 1.	Общее понятие тензорного поля на многообразии . . . . .	292
§ 2.	Простейшие примеры тензорных полей . . . . .	298
	1. Примеры . . . . .	298
	2. Алгебраические операции над тензорами . . . . .	303
	3. Кососимметрические тензоры . . . . .	307
§ 3.	Связность и ковариантное дифференцирование . . . . .	319
	1. Определение и свойства аффинной связности . . . . .	319
	2. Римановы связности . . . . .	327
§ 4.	Параллельный перенос. Геодезические . . . . .	331
	1. Предварительные замечания . . . . .	331
	2. Уравнение параллельного переноса . . . . .	334
	3. Геодезические . . . . .	337
§ 5.	Тензор кривизны . . . . .	351
	1. Предварительные замечания . . . . .	351
	2. Координатное определение тензора кривизны . . . . .	354
	3. Инвариантное определение тензора кривизны . . . . .	355
	4. Алгебраические свойства тензора кривизны Римана . . . . .	356
	5. Некоторые приложения тензора кривизны Римана . . . . .	360
Глава 6.	Теория гомологий . . . . .	364
§ 1.	Исчисление внешних дифференциальных форм. Когомологии . . . . .	365
	1. Дифференцирование внешних дифференциальных форм . . . . .	365
	2. Когомологии гладкого многообразия (когомологии де Рама) . . . . .	371
	3. Гомотопические свойства групп когомологий . . . . .	374
§ 2.	Интегрирование внешних форм . . . . .	380
	1. Интеграл дифференциальной формы по многообразию . . . . .	381
	2. Формула Стокса . . . . .	385
§ 3.	Степень отображения и ее приложения . . . . .	390
	1. Пример . . . . .	390
	2. Степень отображения . . . . .	391
	3. Основная теорема алгебры . . . . .	393
	4. Интегрирование форм . . . . .	394
	5. Гауссово отображение гиперповерхности . . . . .	395
Глава 7.	Простейшие вариационные задачи римановой геометрии . . . . .	398
§ 1.	Понятие функционала. Экстремальные функции. Уравнения Эйлера . . . . .	398
§ 2.	Экстремальность геодезических . . . . .	406
§ 3.	Минимальные поверхности . . . . .	415
§ 4.	Вариационное исчисление и симплектическая геометрия . . . . .	420