

| | |
|--|----|
| Глава 1. Введение в дифференциальную геометрию | 7 |
| 1.1. Криволинейные системы координат. Простейшие приме- ры | 7 |
| 1.1.1. Мотивировка | 7 |
| 1.1.2. Декартовы и криволинейные координаты | 9 |
| 1.1.3. Простейшие примеры криволинейных систем коорди- нат | 14 |
| 1.2. Длина кривой в криволинейных координатах | 17 |
| 1.2.1. Длина кривой в евклидовых координатах | 17 |
| 1.2.2. Длина кривой в криволинейных координатах | 19 |
| 1.2.3. Понятие римановой метрики в области евклидова про- странства | 23 |
| 1.2.4. Индефинитные метрики | 25 |
| 1.3. Геометрия на сфере, плоскости | 28 |
| 1.4. Псевдосфера и геометрия Лобачевского | 34 |
| Глава 2. Общая топология | 48 |
| 2.1. Определения и простейшие свойства метрических и топо- логических пространств | 48 |
| 2.1.1. Метрические пространства | 48 |
| 2.1.2. Топологические пространства | 50 |
| 2.1.3. Непрерывные отображения | 52 |
| 2.1.4. Фактортопология | 54 |
| 2.2. Связность. Аксиомы отделимости | 56 |
| 2.2.1. Связность | 56 |
| 2.2.2. Аксиомы отделимости | 58 |
| 2.3. Компактные пространства | 60 |
| 2.3.1. Компактные пространства | 60 |
| 2.3.2. Свойства компактных пространств | 61 |
| 2.3.3. Метрические компактные пространства | 62 |
| 2.3.4. Операции над компактными пространствами | 62 |
| 2.4. Функциональная отделимость. Разбиение единицы | 63 |
| 2.4.1. Функциональная отделимость | 64 |
| 2.4.2. Разбиение единицы | 66 |

| | |
|--|-----|
| Глава 3. Гладкие многообразия (общая теория) | 68 |
| 3.1. Понятие многообразия | 70 |
| 3.1.1. Основные определения | 70 |
| 3.1.2. Функции замены координат. Определение гладкого многообразия | 73 |
| 3.1.3. Гладкие отображения. Диффеоморфизм | 77 |
| 3.2. Задание многообразий уравнениями | 80 |
| 3.3. Касательные векторы. Касательное пространство | 85 |
| 3.3.1. Простейшие примеры | 85 |
| 3.3.2. Общее определение касательного вектора | 88 |
| 3.3.3. Касательное пространство $T_{P_0}(M)$ | 89 |
| 3.3.4. Производная функции по направлению | 90 |
| 3.3.5. Касательное расслоение | 93 |
| 3.4. Подмногообразия | 95 |
| 3.4.1. Дифференциал гладкого отображения | 95 |
| 3.4.2. Локальные свойства отображений и дифференциал | 98 |
| 3.4.3. Вложение многообразий в евклидово пространство | 100 |
| 3.4.4. Риманова метрика на многообразии | 102 |
| 3.4.5. Теорема Сарда | 104 |
| Глава 4. Гладкие многообразия (примеры) | 109 |
| 4.1. Теория кривых на плоскости и в трехмерном пространстве | 109 |
| 4.1.1. Теория кривых на плоскости. Формулы Френе | 109 |
| 4.1.2. Теория пространственных кривых. Формулы Френе | 114 |
| 4.2. Поверхности. Первая и вторая квадратичные формы | 119 |
| 4.2.1. Первая квадратичная форма | 119 |
| 4.2.2. Вторая квадратичная форма | 122 |
| 4.2.3. Элементарная теория гладких кривых на гиперповерхности | 126 |
| 4.2.4. Гауссова и средняя кривизны двумерных поверхностей | 131 |
| 4.3. Группы преобразований | 140 |
| 4.3.1. Простейшие примеры групп преобразований | 140 |
| 4.3.2. Матричные группы преобразований | 151 |
| 4.3.3. Полная линейная группа | 152 |
| 4.3.4. Специальная линейная группа | 152 |

| | |
|---|------------|
| 4.3.5. Ортогональная группа | 153 |
| 4.3.6. Унитарная группа и специальная унитарная группа | 154 |
| 4.3.7. Симплектическая некомпактная и симплектическая компактная группы | 157 |
| 4.4. Динамические системы | 161 |
| 4.5. Классификация двумерных поверхностей | 171 |
| 4.5.1. Многообразия с краем | 171 |
| 4.5.2. Ориентируемые многообразия | 173 |
| 4.5.3. Классификация двумерных многообразий | 175 |
| 4.6. Двумерные многообразия как римановы поверхности алгебраических функций | 186 |
| Глава 5. Тензорный анализ и риманова геометрия | 197 |
| 5.1. Общее понятие тензорного поля на многообразии | 197 |
| 5.2. Простейшие примеры тензорных полей | 202 |
| 5.2.1. Примеры | 202 |
| 5.2.2. Алгебраические операции над тензорами | 205 |
| 5.2.3. Кососимметричные тензоры | 208 |
| 5.3. Связность и ковариантное дифференцирование | 215 |
| 5.3.1. Определение и свойства аффинной связности | 215 |
| 5.3.2. Римановы связности | 222 |
| 5.4. Параллельный перенос. Геодезические | 224 |
| 5.4.1. Предварительные замечания | 224 |
| 5.4.2. Уравнение параллельного переноса | 226 |
| 5.4.3. Геодезические | 228 |
| 5.5. Тензор кривизны | 237 |
| 5.5.1. Предварительные замечания | 237 |
| 5.5.2. Координатное определение тензора кривизны | 238 |
| 5.5.3. Инвариантное определение тензора кривизны | 239 |
| 5.5.4. Алгебраические свойства тензора кривизны Римана | 240 |
| 5.5.5. Некоторые приложения тензора кривизны Римана | 243 |
| Глава 6. Теория гомологий | 246 |
| 6.1. Исчисление внешних дифференциальных форм. Когомологии | 247 |
| 6.1.1. Дифференцирование внешних дифференциальных форм | 247 |

| | |
|--|-----|
| 6.1.2. Когомологии гладкого многообразия (когомологии де Рама) | 252 |
| 6.1.3. Гомотопические свойства групп когомологий | 255 |
| 6.2. Интегрирование внешних форм | 260 |
| 6.2.1. Интеграл дифференциальной формы по многообразию | 260 |
| 6.2.2. Формула Стокса | 261 |
| 6.3. Степень отображения и ее приложения | 266 |
| 6.3.1. Степень отображения | 266 |
| 6.3.2. Основная теорема алгебры | 267 |
| 6.3.3. Интегрирование форм | 268 |
| 6.3.4. Гауссово отображение гиперповерхности | 269 |

Глава 7. Простейшие вариационные задачи римановой геометрии 271

| | |
|---|-----|
| 7.1. Понятие функционала. Экстремальные функции. Уравнение Эйлера | 271 |
| 7.2. Экстремальность геодезических | 277 |
| 7.3. Минимальные поверхности | 281 |
| 7.4. Вариационное исчисление и симплектическая геометрия . | 284 |