

Рецензенты:

чл.-кор. РАН, д-р физ.-мат. наук, проф. *С. В. Матвеев* (зав. кафедрой компьютерной топологии и алгебры Челябинского государственного университета);

д-р физ.-мат. наук, проф. *В. А. Смирнов* (зав. кафедрой элементарной математики Московского педагогического государственного университета)

Компьютерная геометрия : учеб. пособие для студ. вузов /
К637 Н. Н. Голованов, Д. П. Ильютко, Г. В. Носовский, А. Т. Фоменко — М. : Издательский центр «Академия», 2006. — 512 с. — (Университетский учебник. Сер. Прикладная математика и информатика).

ISBN 5-7695-2822-2

В учебном пособии математически строго изложены все необходимые сведения из дифференциальной геометрии и топологии, даны основные понятия и инструменты компьютерной геометрии, приведено математическое описание некоторых важных алгоритмов геометрического моделирования и автоматического проектирования. Представлены последние результаты достижений в области компьютерной обработки современной цифровой фотографии — склейки проективно-преобразованных изображений.

Для студентов высших учебных заведений.

УДК 514(075.8)

ББК 22.151я73

*Оригинал-макет данного издания является собственностью
Издательского центра «Академия», и его воспроизведение любым способом
без согласия правообладателя запрещается*

© Коллектив авторов, 2006

© Образовательно-издательский центр «Академия», 2006

© Оформление. Издательский центр «Академия», 2006

ISBN 5-7695-2822-2

Условные обозначения	3
Предисловие	4
ЧАСТЬ I. ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ	6
Глава 1. Введение в дифференциальную геометрию	6
1.1. Криволинейные системы координат. Простейшие примеры	6
1.1.1. Мотивировка	6
1.1.2. Декартовы и криволинейные координаты	7
1.1.3. Простейшие примеры криволинейных систем координат	12
1.2. Длина кривой	15
1.2.1. Длина кривой в евклидовых координатах	15
1.2.2. Длина кривой в криволинейных координатах	18
1.2.3. Понятие римановой метрики в области евклидова пространства	21
1.2.4. Индефинитные (закононеопределенные) метрики	24
1.3. Геометрия на плоскости и на сфере	26
1.4. Псевдосфера и геометрия Лобачевского	32
Глава 2. Кривые и поверхности	47
2.1. Теория кривых. Формулы Френе	47
2.1.1. Теория кривых на плоскости. Кривизна	47
2.1.2. Теория пространственных кривых. Кривизна и кручение	52
2.2. Поверхности. Первая и вторая квадратичные формы	57
2.2.1. Определение поверхностей	57
2.2.2. Первая квадратичная форма	59
2.2.3. Вторая квадратичная форма	63
2.2.4. Локальная теория гладких кривых на поверхности. Теорема Менье. Формула Эйлера.	67
2.2.5. Гауссова и средняя кривизны в точке на поверхности	73
Глава 3. Общая топология	84
3.1. Простейшие свойства метрических топологических пространств	84
3.1.1. Метрические пространства	84
3.1.2. Топологические пространства	86
3.1.3. Непрерывные отображения	88

3.1.4. Гомотопия и гомотопическая эквивалентность	91
3.1.5. Фактортопологии	92
3.2. Связность. Аксиомы отделимости	94
3.3. Компактные топологические пространства	98
3.4. Функциональная отделимость. Разбиение единицы	101
3.4.1. Функциональная отделимость	102
3.4.2. Разбиение единицы	104

Глава 4. Гладкие многообразия (обобщение поверхностей) 106

4.1. Понятие многообразия	106
4.1.1. Основные определения	108
4.1.2. Функции склейки. Определение гладкого многообразия	111
4.1.3. Гладкие отображения многообразий. Диффеоморфизмы	116
4.2. Задание многообразий уравнениями в \mathbb{R}^n	119
4.3. Касательные векторы и касательное пространство	124
4.3.1. Простейшие примеры	124
4.3.2. Общее определение касательного вектора	127
4.3.3. Касательное пространство $T_{P_0}(M)$	128
4.3.4. Производная функции по направлению	129
4.4. Подмногообразия	133
4.4.1. Дифференциал гладкого отображения	133
4.4.2. Локальные свойства отображений и дифференциал	136
4.4.3. Вложение многообразий в евклидово пространство	138
4.4.4. Римановы метрики на многообразии	140
4.5. Классификация двумерных поверхностей	142
4.5.1. Многообразия с краем	142
4.5.2. Ориентируемые многообразия	144
4.5.3. Классификация двумерных гладких компактных связных многообразий без края	146
4.6. Изометрии	159
4.7. Двумерные многообразия как римановы поверхности алгебраических функций	161

ЧАСТЬ II. КОМПЬЮТЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ 172

Глава 5. Гладкие кривые с вычислительной точки зрения 172

5.1. Приблизительная локальная форма кривой, определяемая кривизной и кручением	172
5.2. Формулы для кривизны и кручения кривой относительно произвольного параметра в координатах, задаваемых репером Френе	174
5.3. Восстановление пространственной кривой по ее проекциям на координатные плоскости	176
5.4. Приведение параметрического уравнения кривой к неявному виду	177

Глава 6. Сплайны и кривые Безье	181
6.1. Сплайны	181
6.1.1. Примеры сплайнов	181
6.1.2. Построение сплайнов Эрмита	182
6.1.3. Псевдоупругие сплайны Эрмита	184
6.1.4. Случай, когда на концах кривой заданы направления касательных векторов	188
6.1.5. Кубические сплайны. Построение кубического сплайна	188
6.1.6. Сплайн Лагранжа	191
6.1.7. Сплайн Ньютона	192
6.2. Кривые Безье	194
6.2.1. Алгоритм де Кастелье	198
6.2.2. Операторная форма кривой Безье	199
6.2.3. Годографы кривых Безье	201
6.2.4. Деление кривой Безье на две кривые Безье того же порядка в отношении $t^* : (1 - t^*)$	203
6.2.5. Условия сохранения гладкости сопряжения при делении кривой Безье	205
6.2.6. Увеличение числа опорных точек без изменения формы кривой Безье	206
Глава 7. Поверхности Безье	207
7.1. Общие сведения	207
7.2. Геометрический смысл поверхности Безье	207
7.3. Формулы вычисления координат точек на поверхности Безье	208
7.4. Деление поверхности Безье	209
7.5. Геометрические свойства поверхности Безье в угловой точке	209
7.6. Измельчение сетки при сохранении поверхности Безье	211
Глава 8. Проективные (рациональные) кривые Безье	212
8.1. Операция рационального деления отрезка	212
8.2. Свойства рациональных кривых Безье	214
8.3. Деление рациональной кривой Безье	215
8.4. Увеличение числа опорных точек рациональной кривой Безье	218
8.5. Производные на концах рациональной кривой Безье	219
8.6. Рациональные поверхности Безье	221
8.7. Представление кривых второго порядка рациональными кривыми Безье второго порядка	222
Глава 9. <i>B</i> -сплайны (бета-сплайны), <i>B</i> -кривые (бета-кривые) и <i>B</i> -поверхности (бета-поверхности)	225
9.1. Постановка задачи	225
9.2. Разделенные разности	226
9.3. Свойства разделенных разностей	232
9.4. Усеченная степенная функция	233

9.5. Рекуррентные соотношения для B -сплайнов	236
9.6. Алгоритм вычисления радиуса-вектора B -кривой	240
9.7. Алгоритм вычисления производных B -кривой при условии, что $t_1 = \dots = t_m, t_{m+1} = \dots = t_{n+m}$	245
9.8. Алгоритм Де Бура вычисления радиуса-вектора B -кривой	248
9.9. Интерполяция с помощью B -кривых	252
9.10. Представление кубического сплайна в виде B -кривой	252
9.11. B -поверхности	255

Глава 10. Другие способы представления поверхностей в компьютерной геометрии 257

10.1. Линейчатые поверхности	257
10.2. Секториальные поверхности	258
10.3. Поверхности Кунса	258
10.3.1. Линейные поверхности Кунса	258
10.3.2. Матричный вид уравнения поверхности Кунса	259
10.3.3. Обобщенные поверхности Кунса	260
10.4. Поверхности, построенные по остову из кривых	262
10.4.1. Поверхности Эрмита	262
10.4.2. Применение поверхностей Эрмита: поверхность перехода	264
10.4.3. Поверхности Лагранжа	265
10.4.4. Поверхности Гордона	265
10.4.5. Поверхности, затягивающие сетку кривых заплатами Кунса	267
10.4.6. Поверхности тензорного произведения	268
10.5. Поверхности с треугольной параметрической областью	270
10.5.1. Барицентрические координаты	270
10.5.2. Билинейная треугольная поверхность	271
10.5.3. Треугольная поверхность на трех кривых	271

Глава 11. Компьютерная геометрия проективно преобразованных изображений 273

11.1. Введение	273
11.2. Основные понятия проективной геометрии	274
11.3. Метод распознавания сопряженных точек по разнесениям связанных признаков	276
11.4. Устойчивость проективного преобразования к возмущениям конфигурации сопряженных точек	284
11.5. Вычисление матрицы проективного преобразования и оценка ее устойчивости	288
11.5.1. Прямой алгоритм вычисления проективного преобразования	288
11.5.2. Оценка погрешности матрицы проективного преобразования при возмущенных начальных данных	290
11.6. Математическая модель камеры и пары камер	293
11.6.1. Определение финитной камеры	293

11.6.2. Восстановление характеристик финитной камеры по ее матрице	296
11.6.3. Геометрия двух камер. Фундаментальная матрица	298
11.6.4. Свойства фундаментальной матрицы	300
11.6.5. Восстановление пары камер по фундаментальной матрице	301
11.6.6. Канонические пары камер, порожденные фундаментальной матрицей	303
11.7. Простой и нормализованный линейные алгоритмы приближенного вычисления проективного преобразования. Оценка их устойчивости	305
11.7.1. Вычисление проективного преобразования по точно заданным сопряженным точкам	305
11.7.2. Простой линейный алгоритм вычисления проективного преобразования по приближенно заданным сопряженным точкам	307
11.7.3. Вычисление вектора, соответствующего минимальному собственному значению матрицы	309
11.7.4. Неинвариантность простого линейного алгоритма относительно движений плоскости	310
11.7.5. Нормализованный линейный алгоритм нахождения проективного преобразования	315
11.7.6. Оценка ошибки для простого и нормализованного линейных алгоритмов	316

ЧАСТЬ III. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ 324

Глава 12. Геометрические модели	324
12.1. Оболочки и тела	324
12.1.1. Оболочка	324
12.1.2. Оболочки для геометрического моделирования	326
12.1.3. Тело	328
12.2. Элементарные тела	329
12.2.1. Прямоугольная призма	329
12.2.2. Цилиндрическое тело	331
12.2.3. Коническое тело	332
12.2.4. Сферическое тело	333
12.2.5. Тело в форме тора	334
12.3. Тела движения	334
12.3.1. Тело выдавливания	335
12.3.2. Тело вращения	336
12.3.3. Тело сдвига	338
12.3.4. Кинематическое тело	339
12.3.5. Матричная функция кинематического тела	339
12.3.6. Циклы граней тел движения	342
12.4. Тело, построенное по сечениям	343
12.5. Тело, построенное по поверхности	345
12.6. Операции над телами	347

12.7. Булевы операции над телами	348
12.7.1. Объединение тел	350
12.7.2. Пересечение тел	355
12.7.3. Вычитание тел	356
12.7.4. Пересекающиеся ребра	356
12.7.5. Совпадающие ребра	357
12.7.6. Правила для ребер пересечения	357
12.7.7. Принадлежность точки пространству внутри тела	359
12.7.8. Перекрывающиеся грани	359
12.7.9. Тела с несколькими оболочками	360
12.8. Разрезанное тело	360
12.9. Симметричное тело	362
12.10. Тело с достраиваемыми элементами	365
12.11. Эквидистантное тело	368
12.12. Тонкостенное тело	372
12.13. Обработка ребер тела	375
12.13.1. Скругление ребер	375
12.13.2. Скругление сопряженных ребер	377
12.13.3. Скругление вершин	379
12.13.4. Скругление звезд	379
12.13.5. Скругление с сохранением кромки	380
12.13.6. Гладкое сопряжение	381
12.13.7. Переменный радиус скругления	381
12.13.8. Фаски ребер	382
12.14. Геометрические ограничения	382
12.14.1. Цель введения геометрических ограничений	382
12.14.2. Формулировка задачи геометрических ограничений	384
12.14.3. Консервативный метод	385
12.14.4. Метод дополнительных ограничений	387
12.14.5. Метод кластерной декомпозиции	388
12.15. Геометрическая модель	389
Глава 13. Построения на кривых и поверхностях	392
13.1. Построения в геометрических моделях	392
13.1.1. Движение по кривой	393
13.1.2. Движение по поверхности	394
13.2. Проекция точки на кривую	395
13.2.1. Проекция точки на прямую линию	395
13.2.2. Частные случаи	396
13.2.3. Общий случай	396
13.2.4. Принадлежность точки двумерной области	397
13.3. Проекция точки на поверхность	398
13.3.1. Проекция точки на плоскость	398
13.3.2. Частные случаи	400
13.3.3. Общий случай	400
13.3.4. Положение точки относительно оболочки	401

13.4.	Точки пересечения кривой и поверхности	401
13.4.1.	Пересечение прямой и плоскости	401
13.4.2.	Общий случай	402
13.5.	Точки пересечения кривых	404
13.5.1.	Пересечение прямых линий	405
13.5.2.	Пересечение отрезков	406
13.5.3.	Частные случаи	406
13.5.4.	Общий случай пересечения кривых в двумерном пространстве	406
13.5.5.	Пересечение пространственных кривых	408
13.6.	Точки пересечения трех поверхностей	408
13.6.1.	Пересечение трех плоскостей	408
13.6.2.	Пересечение трех поверхностей	409
13.7.	Линии пересечения поверхностей	410
13.7.1.	Пересечение плоскостей	410
13.7.2.	Частные случаи пересечения поверхностей	411
13.7.3.	Общий случай пересечения поверхностей	412
13.7.4.	Алгоритм построения линий пересечения	415
13.7.5.	Радиус-вектор линии пересечения поверхностей	419
13.8.	Поверхности сопряжения	420
13.8.1.	Поверхности скругления	420
13.8.2.	Переменный радиус скругления	423
13.8.3.	Поверхность скругления с сохранением кромки	425
13.8.4.	Поверхность скругления с заданной хордой	426
13.8.5.	Гладкое сопряжение	427
13.8.6.	Поверхность фаски	427
13.8.7.	Фаска с переменными катетами	429
13.9.	Погрешность геометрических построений	429
Глава 14. Геометрические вычисления		431
14.1.	Геометрические характеристики плоского сечения	431
14.1.1.	Площадь и центр масс плоского сечения	431
14.1.2.	Моменты инерции плоского сечения	432
14.1.3.	Вычисление моментов инерции плоского сечения	434
14.2.	Площадь поверхности, объем и центр масс тела	436
14.2.1.	Площадь поверхности тела	436
14.2.2.	Объем тела	436
14.2.3.	Статические моменты тела	437
14.2.4.	Центр масс тела	438
14.3.	Моменты инерции тела	440
14.3.1.	Тензор инерции	440
14.3.2.	Собственные значения матрицы инерции	442
14.3.3.	Главные оси инерции	443
14.3.4.	Эллипсоид инерции	446
14.3.5.	Тензорное поле	447
14.3.6.	Вычисление моментов инерции тела	448
14.4.	Численное интегрирование по поверхности	451
14.4.1.	Разбиение поверхности	451

14.4.2. Построение четырехугольных областей	452
14.4.3. Построение треугольных областей	453
14.4.4. Кубатурная формула для четырехугольной области	456
14.4.5. Кубатурная формула для треугольной области	458
Глава 15. Методы компьютерной графики	461
15.1. Полигоны кривых и поверхностей	461
15.1.1. Полигоны	462
15.1.2. Сетки полигонов	464
15.2. Силуэтные линии	465
15.3. Определение видимой части моделей	469
15.3.1. Векторное изображение	469
15.3.2. Точечное изображение	470
15.4. Триангуляция	471
15.4.1. Триангуляция плоскости	471
15.4.2. Триангуляция Делоне	472
15.4.3. Итеративная триангуляция Делоне	475
15.4.4. Триангуляция Делоне ограниченной области	476
15.4.5. Триангуляция поверхностей	478
15.4.6. Триангуляция оболочек	482
15.5. Моделирование оптических свойств	483
15.5.1. Свет	483
15.5.2. Модель световых лучей	484
15.5.3. Диффузное отражение	485
15.5.4. Зеркальное отражение	485
15.5.5. Рассеяние света	486
15.5.6. Прозрачность	486
15.5.7. Наблюдение света	487
15.5.8. Описание цвета	489
15.6. Построение реалистических изображений	490
15.6.1. Переход в систему координат проекционной плоскости	491
15.6.2. Определение яркости и цвета точки изображения	492
15.6.3. Методы закраски	493
15.6.4. Детализация поверхностей	495
15.6.5. Тени	495
15.6.6. Прозрачность	496
Список литературы	498
Преметный указатель	500