

| | |
|---|-----------|
| Предисловие | 7 |
| Краткая историческая справка | 9 |
| Глава 1. СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ | 17 |
| § 1. Некоторые необходимые сведения из теории матричных групп | 17 |
| 1.1. Группы и алгебры Ли. — 1.2. Полные линейные группы $GL(n, \mathbf{R})$, $GL(n, \mathbf{C})$ и их алгебры Ли. — 1.3. Специальные линейные группы $SL(n, \mathbf{R})$ и $SL(n, \mathbf{C})$. — 1.4. Ортогональная группа $O(n)$ и специальная ортогональная группа $SO(n)$. — 1.5. Унитарная группа $U(n)$ и специальная унитарная группа $SU(n)$. — 1.6. Компоненты связности матричных групп. — 1.7. Операция овеществления и комплексные структуры. | |
| § 2. Группы симплектических преобразований линейного пространства | 31 |
| 2.1. Симплектические линейные преобразования. — 2.2. Некомпактные группы $Sp(n, \mathbf{R})$ и $Sp(n, \mathbf{C})$. — 2.3. Компактная группа $Sp(n)$. — 2.4. Связь симплектических групп с другими матричными группами. | |
| § 3. Лагранжева геометрия и лагранжевы многообразия | 47 |
| 3.1. Вещественные лагранжевы многообразия в симплектическом линейном пространстве. — 3.2. Лагранжевы комплексные грассмановы многообразия. — 3.3. Лагранжевы вещественные грассмановы многообразия. | |
| Глава 2. СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ГЛАДКИХ МНОГООБРАЗИЯХ. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ УРАВНЕНИЯ | 63 |
| § 1. Симплектические многообразия | 63 |
| 1.1. Симплектическая структура на гладком многообразии. — 1.2. Гамильтоновы, локально гамильтоновы векторные поля и скобка Пуассона. — 1.3. Интегралы гамильтоновых полей. — 1.4. Теорема Лиувилля. | |
| § 2. Геометрические свойства скобки Пуассона | 81 |
| 2.1. Первичность понятия скобки Пуассона. — 2.2. Теорема Дарбу. | |
| § 3. Вложения симплектических многообразий. Примеры симплектических многообразий | 86 |
| Глава 3. НЕКОТОРЫЕ КЛАССИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ И ИХ ГАМИЛЬТОНОВЫЕ | 97 |
| § 1. Классические уравнения движения трехмерного твердого тела | 97 |
| 1.1. Уравнения Эйлера—Пуассона, описывающие движение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. — 1.2. Интегрируемые случаи Эйлера, Лагранжа и Ковалевской. — 1.3. Общие уравнения движения трехмерного твердого тела. | |
| § 2. Гамильтоновость уравнений движения трехмерного твердого тела | 108 |
| § 3. Некоторые сведения о группах и алгебрах Ли, необходимые для гамильтоновой геометрии | 111 |
| 3.1. Присоединенное и коприсоединенное представления, полупростота, система корней и простых корней, орбиты, каноническая симплектическая структура. — 3.2. Модельный пример: $SL(n, \mathbf{C})$ и $sl(n, \mathbf{C})$. — 3.3. Вещественные, компактные и нормальные подалгебры. | |

§ 1. Классификация трехмерных поверхностей постоянной энергии интегрируемых уравнений. Оценка количества устойчивых периодических решений на поверхности постоянной энергии. Препятствия к гладкой интегрируемости уравнений на симплектических многообразиях

1.1. Случай четырехмерных симплектических многообразий. — 1.2. Краткая сводка необходимых сведений из классической теории Морса гладких функций. — 1.3. Топологические перестройки торов Лиувилля интегрируемой системы при изменении значения второго интеграла. — 1.4. Сепаратрисные диаграммы высекают нетривиальные циклы на неособых торах Лиувилля. — 1.5. Изоэнергетические поверхности задаются одномерными графами, вершины которых разбиваются на пять канонических типов. — 1.6. Любая поверхность постоянной энергии интегрируемой системы представляется в виде склейки простейших трехмерных многообразий трех типов. — 1.7. Двухлистные накрытия над изоэнергетическими интегрируемыми поверхностями всегда обладают ориентированным интегралом. — 1.8. Нижние оценки на число устойчивых периодических решений системы. — 1.9. Топологические препятствия к гладкой интегрируемости. Далеко не каждое трехмерное многообразие может реализовываться как изоэнергетическая поверхность интегрируемой системы. — 1.10. «Достаточно большие» трехмерные изоэнергетические поверхности полностью определяются своими фундаментальными группами.

§ 2. Классификация перестроек торов Лиувилля на многомерных симплектических многообразиях в окрестности бифуркационной диаграммы отображения момента

2.1. Бифуркационная диаграмма отображения момента интегрируемой системы. Перестройки общего положения. — 2.2. Классификация бифуркаций торов Лиувилля. — 2.3. Торические ручки. Сепаратрисная диаграмма всегда приклеивается к неособому тору Лиувилля по нетривиальному циклу.

§ 3. Свойства разложения изоэнергетических поверхностей интегрируемых систем в сумму простейших многообразий

3.1. Фундаментальное разложение $Q = mI + pII + qIII + sIV + rV$ и структура особых слоев. — 3.2. Гомологические свойства изоэнергетических поверхностей.

§ 1. Полные инволютивные наборы функций и максимальные линейные коммутативные подалгебры в алгебре функций на симплектическом многообразии.

§ 2. Гамильтонова система уравнений интегрируема, если ее гамильтониан включается в достаточно большую алгебру Ли функций.

§ 3. Общие свойства инвариантных подмногообразий гамильтоновых систем дифференциальных уравнений

3.1. Редукция системы на одной изолированной поверхности уровня. — 3.2. Некоммутативное интегрирование в тех случаях, когда набор интегралов не образует алгебры. — 3.3. Некоторые дальнейшие обобщения метода некоммутативного интегрирования. — 3.4. Канонический вид скобки Пуассона в окрестности особой точки. Случай вырожденных скобок Пуассона.

| | |
|---|-----|
| § 4. Системы уравнений, вполне интегрируемые в некоммутативном смысле, часто вполне интегрируемы по Лиувиллю в обычном смысле. | 236 |
| 4.1. Формулировка общей гипотезы эквивалентности и ее справедливость для компактных многообразий. — 4.2. Некоммутативная интегрируемость и ее связь с каноническими подмногообразиями и изотропными торами. — 4.3. Свойства отображения момента системы, интегрируемой в некоммутативном смысле. — 4.4. Теорема существования и явная конструкция максимальных линейных коммутативных алгебр функций на орбитах в полупростых и редуцированных алгебрах Ли. — 4.5. Доказательство гипотезы эквивалентности для случая компактных многообразий. — 4.6. Отображение момента систем, интегрируемых в некоммутативном смысле при помощи избыточного набора интегралов. — 4.7. Достаточные условия компактности алгебры Ли интегралов гамильтоновой системы. | |
| § 5. Динамические системы и симплектические структуры, порождаемые секционными операторами | 258 |
| 5.1. Общая схема построения секционных операторов. — 5.2. Секционные операторы на симметрических пространствах. — 5.3. Тензор римановой кривизны и порождаемые им симплектические структуры. | |
| Глава 6. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПОТОКИ НА ДВУМЕРНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ | 271 |
| § 1. Топологические препятствия к аналитической полной интегрируемости | 271 |
| 1.1. Неинтегрируемость уравнений движения натуральных механических систем с двумя степенями свободы на поверхностях большого рода. — 1.2. Неинтегрируемость геодезических потоков на римановых поверхностях большого рода с выпуклым краем. — 1.3. Неинтегрируемость задачи n гравитирующих центров при $n > 2$. — 1.4. Неинтегрируемость некоторых гироскопических систем. | |
| § 2. Топологические препятствия к аналитической интегрируемости геодезических потоков на многомерных неодносвязных многообразиях. | 277 |
| § 3. Интегрируемость и неинтегрируемость геодезических потоков на двумерных поверхностях, на сфере и торе | 279 |
| 3.1. Голоморфная 1-форма полиномиального по импульсам интеграла геодезического потока и случай рода $g > 1$. — 3.2. Случай сферы и тора. — 3.3. Свойства геодезических интегрируемых потоков на сфере. | |
| Глава 7. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ КОНКРЕТНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ГЕОМЕТРИИ И МЕХАНИКЕ. МЕТОДЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ | 291 |
| § 1. Алгебры Ли и механика. Вложения динамических систем в алгебры Ли на канонические симплектические многообразия | 291 |
| § 2. Левоинвариантные гамильтоновы системы на группах Ли и уравнения Эйлера на алгебрах Ли | 293 |
| 2.1. Симплектическая структура и левоинвариантные гамильтонианы. — 2.2. Квадратичные гамильтонианы, порожденные методом сдвига аргумента. — 2.3. Свойства общих уравнений Эйлера. | |
| § 3. Секционные операторы в случае полупростых алгебр Ли и соответствующие им левоинвариантные твердотельные метрики | 303 |
| 3.1. Секционное разложение полупростой алгебры Ли совпадает с картановским разложением. — 3.2. Различные виды секционных операторов (твердотельных метрик). Комплексная серия. Нормальная нильпотентная серия. Нормальная разрешимая серия. — 3.3. Компактная серия операторов (твердотельных метрик). — 3.4. Нормальная серия операторов (твердотельных метрик). | |

| | |
|--|-----|
| § 4. Явное построение интегралов уравнений Эйлера, отвечающих комплексной, компактной и нормальной сериям операторов (левоинвариантных твердотельных метрик) | 312 |
| 4.1. Интегралы комплексной серии. — 4.2. Интегралы компактной серии. — 4.3. Интегралы нормальной серии. — 4.4. Инволютивность построенных интегралов. | |
| § 5. Случаи полной интегрируемости уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли | 319 |
| 5.1. Комплексная серия твердотельных метрик. — 5.2. Компактная серия твердотельных метрик. — 5.3. Нормальная серия твердотельных метрик. — 5.4. Интегрируемость уравнений Эйлера на сингулярных орбитах. | |
| § 6. Список обнаруженных максимальных линейных коммутативных алгебр функций на орбитах коприсоединенных представлений групп Ли | 332 |
| Приложение 1. Геометрические свойства твердотельных инвариантных метрик на однородных пространствах | 343 |
| Приложение 2. Уравнения Эйлера на алгебре Ли $so(4)$ | 345 |
| Приложение 3. Выпуклость отображения момента при пуассоновом действии тора | 357 |
| Приложение 4. Любая композиция элементарных бифуркаций (трех типов) торов Лиувилля реализуется для некоторой интегрируемой системы на подходящем симплектическом многообразии. Классификация неориентируемых критических подмногообразий боттовских интегралов | 358 |
| Приложение 5. Некоторые другие методы построения интегралов дифференциальных уравнений на алгебрах Ли | 366 |
| Приложение 6. Критерий полноты набора интегралов, получаемых методом сдвига аргумента | 371 |
| Приложение 7. Новый топологический инвариант гамильтоновых систем дифференциальных уравнений, интегрируемых по Лиувиллю. Инвариантный портрет интегрируемых гамильтонианов | 375 |
| Приложение 8. Теория типа Морса для гамильтоновых систем, интегрируемых при помощи неботтовских интегралов | 393 |
| Некоторые обозначения | 400 |
| Дополнение. О рисунках | 400 |
| Литература | 402 |
| Дополнительный список литературы | 412 |