

Differential Geometry and Topology

by A. T. Fomenko

©1987 Consultants Bureau, New York
A Division of Plenum Publishing Corp.
233 Spring St., New York, NY 10013, U.S.A.

Since Chapter 6, Section 23:

©1993 Anatoly T. Fomenko

Dept. of Differential Geometry and Applications
Faculty of Math. and Mech.
MOSCOW STATE UNIVERSITY

R <日本複写権センター委託出版物・特別扱い>

本書の無断複写は、著作権法上での例外を除き禁じられています。本書は、日本複写権センターへの特別委託出版物です。本書を複写される場合は、すでに日本複写権センターと包括契約をされている方も、そのつど事前に日本複写権センター（電話03-3401-2382）を通して当社の許諾を得てください。

目 次

序 論	i
-----	---

第 1 章

CW 複体と束：ホモロジーとコホモロジーおよびその計算法	1
------------------------------	---

1 CW 複体とその最も簡単な性質	1
1.1 準 備	1
1.2 CW 複体の例	3
2 特異ホモロジー群	6
2.1 特異単体, 境界作用素およびホモロジー群	6
2.2 鎖複体, 鎖ホモトピーとホモロジー群のホモトピー不変性	9
3 対のホモトピー完全系列	12
3.1 完全系列の構成	12
3.2 相対ホモロジーの絶対ホモロジーへの帰着性	14
4 胞体ホモロジー	18
4.1 球面の特異ホモロジーの計算	18
4.2 胞体鎖の群	21
4.3 胞体ホモロジー群	22
4.4 有限複体の特異ホモロジーと胞体ホモロジーの一致性定理	22

4.5	胞体ホモロジー群の幾何学的定義	26
4.6	胞体ホモロジー群の計算例	29
5	コホモロジー	33
5.1	特異双対鎖と作用素 δ	33
5.2	コホモロジー群	33
5.3	体に係数をもつコホモロジー群	35
6	束	38
6.1	局所自明な束の定義	38
6.2	束の例	40
6.3	Hopf 束の幾何	41
6.4	球面の単位接ベクトルの束の幾何	45
7	(コ) ホモロジーの計算法をいくつか (スペクトル系列)	52
7.1	複体のフィルターづけ	52
7.2	フィルターづけからのスペクトル系列の再構成	53
7.3	スペクトル系列の主要な代数的性質	58
7.4	コホモロジー・スペクトル系列	61
7.5	束のスペクトル系列	62
7.6	コホモロジー・スペクトル系列の積	66
7.7	スペクトル系列を用いたいくつかの計算例	67

第2章

多様体上の滑らかな関数の臨界点 74

8	等位面の臨界点と幾何	74
8.1	臨界点の定義	74
8.2	非退化臨界点の近傍における関数の標準的表示	76
8.3	臨界点の近傍における関数の等位面の位相的構造	79
8.4	Morse 関数に付随した多様体の CW 複体としての表示	82
8.5	コンパクト多様体の把手の接着と把手の和への分解	83

目次	vii
9 分岐点とそのホモロジーとの関連性	87
9.1 分岐点の定義	87
9.2 関数の Poincaré 多項式と多様体の Poincaré 多項式を結ぶ定理	90
9.3 いくつかの系	92
9.4 2次元多様体上の関数の臨界点	96
10 関数の臨界点と多様体のカテゴリー	101
10.1 カテゴリーの定義	101
10.2 カテゴリーの位相的性質	102
10.3 分岐点の個数の下界に関する定理の定式化	105
10.4 定理 10.1 の証明	107
10.5 カテゴリーの計算例	111
11 認容 Morse 関数とボルディズム	117
11.1 ボルディズム	117
11.2 初等的なボルディズムの合成へのボルディズムの分解	118
11.3 勾配場のベクトル場とセパトリックス状の円板	120
11.4 滑らかな関数の等位面の再構成	122
11.5 認容 Morse 関数の構成	125
11.6 Poincaré 双対性	131

第3章

3次元多様体のトポロジー 138

12 3次元多様体の標準表示	138
12.1 認容 Morse 関数と Heegaard 分解	138
12.2 Heegaard 分解の例	141
12.3 ネットによる3次元多様体の符号化	144
12.4 ネットとセパトリックス	147
13 3次元球面の認識問題	149
13.1 ホモロジー球面	149

13.2	ホモトピー球面	161
14	多様体のアルゴリズム的分類	162
14.1	3次元多様体の基本群	162
14.2	4次元多様体の基本群	163
14.3	次元 > 3 の滑らかな多様体の分類の不可能性について	165
第4章		
対称空間		
15	対称空間の主要な性質とそのモデルおよび等長変換群	169
15.1	対称空間の定義	169
15.2	対称空間としての Lie 群	169
15.3	曲率テンソルの性質	172
15.4	対合自己同型と対応する対称空間	173
15.5	対称空間の Cartan モデル	175
15.6	Cartan モデルの幾何	179
15.7	対称空間のいくつかの重要例	181
16	Lie 群の幾何	188
16.1	半単純 Lie 群と Lie 環	188
16.2	Cartan 部分環	190
16.3	半単純 Lie 環のルートとそのルート分解	192
16.4	ルート系のいくつかの性質	195
16.5	単純 Lie 環のルート系	202
17	コンパクト Lie 群	207
17.1	実形	207
17.2	コンパクト形	208
18	随伴表現の軌道	217
18.1	生成軌道と特異軌道	217
18.2	Lie 群における軌道	221

18.3	コンパクト Lie 群の極大トーラスの共役性に関する定理の証明	223
18.4	Weyl 群と軌道との関連	231

第 5 章

シンプレクティック幾何学 235

19	シンプレクティック多様体	235
19.1	シンプレクティック構造とその標準表示, 歪対称勾配	235
19.2	Hamilton ベクトル場	240
19.3	Poisson 括弧と Hamilton ベクトル場の積分	241
19.4	Liouville の定理 (Hamilton 系の可換な積分)	247
20	Hamilton 系の非可換積分	254
20.1	積分の非可換 Lie 環	254
20.2	非可換積分に関する定理	256
20.3	非可換な対称性をもつ Hamilton 系の簡約	259
20.4	シンプレクティック多様体としての共役随伴表現の軌道	269

第 6 章

幾何学と力学 271

21	Hamilton 系の Lie 環への埋め込み	271
21.1	問題の定式化と可換関数の全集合	271
21.2	不動点をもつ多次元剛体運動方程式と半単純 Lie 環上のその類似 および複素系列	276
21.3	コンパクト, 正規系列の Hamilton 系	281
21.4	断面作用素と軌道上の対応する力学系	286
21.5	理想流体における多次元剛体の慣性による運動方程式	291
22	Lie 環上の剛体型 Hamilton 系の完全積分可能性	299
22.1	変数移動法と Lie 環の軌道上の積分の可換 Lie 環の構成	299

22.2	Lie 環 $\mathfrak{so}(3)$ と $\mathfrak{so}(4)$ の例	305
22.3	重力を考慮しない状況下での不動点をもつ多次元剛体の運動方程式の完全積分可能性と半単純 Lie 環上のその類似の完全積分可能性の場合	309
22.4	理想流体における多次元剛体の慣性による運動方程式の完全積分可能性の場合	315
22.5	電磁流体力学の方程式とその積分可能性の場合	318
23	変数移動法により得られる Lie 環上の Hamilton 系の完全積分可能性に対する Bolsinov の判定法	319
23.1	Lie 環の特異点集合の積分可能性と次元の判定法	319
23.2	一般的な研究法	323

第 7 章

曲面上の Morse 関数の符号化： 原子と分子および Hamilton 物理学の分子 **325**

24	単純 Morse 関数と Reeb グラフ	325
24.1	単純 Morse 関数と複雑 Morse 関数	325
24.2	単純原子と単純関数の符号としての古典的 Reeb グラフ	327
24.3	向きづけ不能な場合の単純 Morse 関数に対する鞍状原子	333
24.4	向きづけ不能な曲面上の単純 Morse 関数の例：射影平面と Klein の壺	335
25	複雑 Morse 関数および複雑原子と一般分子	337
25.1	例：複雑 Morse 関数として対称性をもつ関数	337
25.2	複雑 Morse 関数および複雑原子と複雑分子（向きづけ可能な場合）	339
25.3	（向きづけ不能な場合を含む）一般的な状況	344
26	自由度 2 をもつ積分可能な非退化 Hamilton 系の粗い分類と細かい分類 .	356
26.1	Hamilton 物理学と Hamilton 力学における典型的な積分	356
26.2	積分可能な系の粗い同値と細かい同値	359
26.3	主 定 理	359

付録

**Lie 環の Baker-Hausdorff-Campbell 公式：積分積とその対数
および Baker-Hausdorff-Campbell 公式連続的類似** 363

A-1	指数写像と対数	363
A-2	微分方程式 $\frac{dX(t)}{dt} = K(t)X(t)$ の解および積分積とその対数	366
A-3	積分積の対数に対する漸化式 (一般の連続な場合)	370
A-4	積分積の離散版の対数に対する漸化式 (Baker-Hausdorff-Campbell 漸化式 の多次元一般化)	372
A-5	積分積の対数に対する Magnus 方程式 (連続な場合)	374
	参考文献	379
	訳者あとがき	387
	索引	389