

Предисловие . . . . . 3

Глава 1. Полиэдры. Симплициальные комплексы. Гомология . . . . . 6

§ 1. Полиэдры . . . . . 6

1.1. Вводные замечания. 1.2. Понятие  $n$ -мерного симплекса. Баричесентрические координаты. 1.3. Полиэдры. Симплициальные подразделения полиэдров. Симплициальные комплексы. 1.4. Примеры полиэдров. 1.5. Баричесентрическое подразделение. 1.6. Комментарий к главному материалу.

§ 2. Группы симплициальных гомологий симплициальных комплексов (полиэдров) . . . . . 23

2.1. Симплициальные цепи. 2.2. Граница цепи. 2.3. Простейшие свойства оператора границы. Циклы. Границы. 2.4. Примеры вычисления оператора границы. 2.5. Группы симплициальных гомологий. 2.6. Примеры вычисления групп гомологий. Гомологий двумерных поверхностей. 2.7. Комментарий к главному материалу.

§ 3. Общие свойства групп симплициальных гомологий. Некоторые методы вычисления групп гомологий . . . . . 43

3.1. Матрицы инцидентий. 3.2. Метод вычисления групп гомологий при помощи матриц инцидентий. 3.3. «Следы» клеточных гомологий внутри симплициальных. 3.4. Цепная гомотопия. Независимость симплициальных гомологий полиэдра от выбора триангуляции. 3.5. Комментарий к главному материалу.

Глава 2. Многообразия малой размерности 56

§ 1. Некоторые основные понятия дифференциальной геометрии . . . . . 56

1.1. Координаты в области. Преобразования криволинейных координат. 1.2. Понятие многообразия. Гладкие многообразия. Многообразия с краем. Касательное пространство и касательное расслоение. 1.3. Ориентируемость и неориентируемость. Дифференциал отображения. Регулярные и правильные точки. Вложения и погружения многообразий. Критические точки гладких функций на многообразиях. Индекс невырожденных критических точек и функции Морса. 1.4. Векторные и ковекторные поля. Интегральные траектории. Коммутатор

векторных полей. Алгебра Ли векторных полей на многообразии. 1.5. Комментарий к главному материалу.

§ 2. Наглядные свойства одномерных многообразий . . . . . 72

2.1. Изотопии, оснащения. 2.2. Комментарий к главному материалу.

§ 3. Наглядные свойства двумерных многообразий . . . . . 77

3.1. Двумерные многообразия с краем. 3.2. Примеры двумерных многообразий. 3.3. Моделирование проективной плоскости в трехмерном пространстве. 3.4. Две серии двумерных замкнутых многообразий. 3.5. Классификация замкнутых 2-многообразий. 3.6. Выворачивание двумерной сферы наизнанку. 3.7. Комментарий к главному материалу.

§ 4. Чем отличаются друг от друга разные двумерные многообразия? Группы когомологий и дифференциальные формы . . . . . 100

4.1. Дифференциальные 1-формы на гладком многообразии. 4.2. Замкнутые и точные формы на двумерном многообразии. 4.3. Важное свойство групп когомологий. 4.4. Прямое вычисление групп одномерных когомологий одномерных многообразий. 4.5. Прямое вычисление групп одномерных когомологий плоскости двумерной сферы и тора. 4.6. Прямое вычисление групп одномерных когомологий ориентируемых поверхностей, т.е. сфер с ручками. 4.7. Алгоритм распознавания двумерных многообразий. Элементы компьютерной двумерной геометрии. 4.8. Вычисление эйлеровой характеристики поверхности при помощи триангуляции. 4.9. Комментарий к главному материалу.

§ 5. Наглядные свойства трехмерных многообразий . . . . . 115

5.1. Разбиение (или диаграммы) Хегора. 5.2. Примеры трехмерных многообразий. 5.3. Эквивалентность разбиений Хегора. 5.4. Спайны. 5.5. Специальные спайны. 5.6. Фильтрация 3-многообразий по сложности. 5.7. Упрощение специальных спайнов. 5.8. Применение ЭВМ в трехмерной топологии. Перечисление многообразий в порядке возрастания сложности. 5.9. Сложность 3-многообразий и склеивания симплексов. 5.10. Комментарий к главному материалу.

Глава 3. Наглядная симплектическая топология и механика . . . . . 146

§ 1. Некоторые понятия гамильтоновой геометрии . . . . . 146

1.1. Гамильтоновы системы на симплектических многообразиях. 1.2. Инволютивные интегралы и торы Лиувилля. 1.3. Отображение момента интегрируемой системы. 1.4. Перестройки торов Лиувилля при критических значениях энергии. 1.5. Комментарий к наглядному материалу.

§ 2. Качественные вопросы геометрического интегрирования некоторых дифференциальных уравнений. Классификация простых перестроек торов Лиувилля интегрируемых систем с морс-боттовскими интегралами . . . . . 156

2.1. Морс-боттовские интегралы. 2.2. Классификация простых, невырожденных перестроек торов Лиувилля. 2.3. Топологическая структура критических уровней энергии при фиксированном втором интеграле. 2.4. Примеры из механики. Уравнения движения твердого тела. Сфера Пуассона. Геометрическое исследование механических систем. 2.5. Пример исследования механической системы. Система Лиувилля на плоскости. 2.6. Система Лиувилля на сфере. 2.7. Движение гиригистата по инерции. 2.8. Случай Чаплыгина-Сретенского. 2.9. Случай Ковалевской. 2.10. Комментарий к наглядному материалу.

§ 3. Трехмерные многообразия и наглядная геометрия изоэнергетических поверхностей интегрируемых систем . . . . . 173

3.1. Одномерный граф как диаграмма гамильтониана. 3.2. Какие известные многообразия встречаются среди изоэнергетических поверхностей? 3.3. Простейшие изоэнергетические поверхности (с краем). 3.4. Любая изоэнергетическая поверхность интегрируемой боттовской системы распадается в сумму элементарных кирпичей пяти (или двух) типов. 3.5. Новые топологические свойства класса изоэнергетических поверхностей. 3.6. Об одном применении компьютеров в симплектической топологии. 3.7. Комментарий к наглядному материалу.

Глава 4. Наглядные образы в некоторых других областях геометрии и ее приложений . 190

§ 1. Наглядная геометрия мыльных пленок. Минимальные поверхности . . . . . 190

1.1. Границы раздела физических сред и минимальные поверхности. 1.2. Некоторые примеры минимальных поверхностей. 1.3. Комментарий к наглядному материалу.

§ 2. Фрактальная геометрия и размерность . 195

2.1. Различные понятия размерности. 2.2. Фракталы. 2.3. Комментарий к наглядному материалу.

§ 3. Наглядная компьютерная геометрия в теории чисел . . . . . 200

Литература . . . . . 209

Наглядный материал . . . . . 223