

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	8
<i>Введение.</i> ВАЖНЕЙШИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА .....	11
§ 1. Классические пространства .....	11
1. Евклидовы пространства, сферы и шары (11). 2. Вещественные проективные пространства (12). 3. Комплексные и кватернионные проективные пространства (13). 4. Проективная плоскость Кэли (13). 5. Многообразия Грассмана (15). 6. Многообразия флагов (16). 7. Компактные классические группы (16). 8. Многообразия Штифеля (16). 9. Классические действия классических групп в классических пространствах (16). 10. Классические поверхности (17).	
§ 2. Операции над топологическими пространствами .....	20
1. Произведения (20). 2. Цилиндр, конус и надстройка (21). 3. Приклеивания. Цилиндр и конус отображения (22). 4. Джойн (22). 5. Пространства отображений, путей и петель (23). 6. Операции над пространствами с отмеченной точкой (24).	
<i>Глава 1.</i> ГОМОТОПИИ. ....	26
§ 3. Гомотопии и гомотопические эквивалентности .....	26
1. Определение гомотопии (26). 2. Множества $\pi(X, Y)$ (26). 3. Гомотопическая эквивалентность (27). 4. Ретракты (29). 5. Пример гомотопического инварианта: категория Люстерника — Шнирельмана (30). 6. Случай пространств с отмеченной точкой, пар, троек и т.д. (30).	
§ 4. Естественные групповые структуры в множествах $\pi(X, Y)$ .....	31
§ 5. Клеточные пространства .....	35
1. Основные определения (35). 2. Комментарии к определению клеточного пространства (36). 3. Отношение к операциям из § 2 (37). 4. Клеточные разбиения классических пространств (38). 5. Теорема Борсука о продолжении гомотопий (43). 6. Следствия из теоремы Борсука (44). 7. Теорема о клеточной аппроксимации (44). 8. Борьба с химерой: доказательство леммы о свободной точке (46). 9. Первые применения теоремы о клеточной аппроксимации (48).	
§ 6. Фундаментальная группа. ....	50
1. Определение (50). 2. Зависимость от отмеченной точки (51). 3. Вычисление фундаментальных групп (51).	
§ 7. Накрытия. ....	57
1. Определение и примеры (57). 2. Теорема о накрывающей гомотопии (58). 3. Накрытия и фундаментальная группа (59). 4. Регулярные накрытия (61). 5. Универсальные накрытия (61). 6. Теорема о поднятии отображения (61). 7. Критерий эквивалентности накрытий (62). 8. Существование и классификация накрытий (62).	
§ 8. Гомотопические группы. ....	63
1. Определение; коммутативность (63). 2. Зависимость от отмеченной точки (64). 3. Гомотопические группы и накрытия (64). 4. Относительные гомотопические группы (65). 5. "Гомотопические группы" $\pi_0(X, x_0)$ и $\pi_1(X, A; x_0)$ (66). 6. Связи между относительными и абсолютными гомото-	

	пическими группами (67). 7. Гомотопическая последовательность пары (67). 8. Следствия точности (68).	
§ 9.	Расслоения . . . . .	70
	1. Определения (70). 2. Накрывающие гомотопии (71). 3. Доказательство теоремы о накрывающей гомотопии (72). 4. Расслоения в смысле Серра (73). 5. Слои (74). 6. Любое отображение гомотопически эквивалентно расслоению в смысле Серра (76). 7. Гомотопическая последовательность расслоения (77). 8. Первые применения точности (78). 9. Заключение: исполнение обещания из § 8 (79).	
§ 10.	Теорема о надстройке и гомотопические группы сфер . . . . .	79
	1. Основная теорема (79). 2. Первые применения (82). 3. Степень отображения $S^n \rightarrow S^n$ (83). 4. Стабильные гомотопические группы сфер (84). 5. Умножение Уайтхеда и "трудная часть теоремы Фрейденгала" (84).	
§ 11.	Гомотопические группы и клеточные пространства . . . . .	86
	1. Аддиционная теорема (86). 2. Применение аддиционной теоремы: гомотопические группы букетов (88). 3. Первая нетривиальная гомотопическая группа клеточного пространства (88). 4. Слабая гомотопическая эквивалентность как отображение (89). 5. Теорема Уайтхеда (91). 6. Клеточная аппроксимация топологических пространств (91). 7. Пространства Эйленберга-Маклейна ( $K(\pi, n)$ 'ы) (92). 8. Единственность $K(\pi, n)$ 'ов (93). 9. Заклеивание и убивание гомотопических групп (93).	
<b>Глава 2. ГОМОЛОГИИ . . . . .</b>		<b>95</b>
§ 12.	Сингулярные гомологии. . . . .	95
	1. Сингулярные симплексы, цепи и гомологии (95). 2. Цепные комплексы, отображения и гомотопии (96). 3. Простейшие вычисления (98). 4. Относительные гомологии (100). 5. Относительные гомологии как абсолютные (101). 6. Дополнения (105).	
§ 13.	Вычисление гомологий клеточных пространств. . . . .	106
	1. Гомологии сфер. Изоморфизм надстройки (106). 2. Гомологии букетов сфер и вообще букетов (107). 3. Отображения сфер в сферы и букетов сфер в букеты сфер (107). 4. Клеточный комплекс (109). 5. Гомологии клеточного комплекса (111). 6. Классический комплекс (112). 7. Некоторые вычисления (113). 8. Цепные отображения клеточных комплексов (116).	
§ 14.	Гомологии и гомотопии. . . . .	117
	1. Гомологии и слабые гомотопические эквивалентности (117). 2. Теорема Гуревича (119). 3. Случай $n = 1$ (120). 4. Относительный вариант теоремы Гуревича (121). 5. Теорема Уайтхеда (122).	
§ 15.	Гомологии с коэффициентами и когомологии . . . . .	123
	1. Определения (123). 2. Перенесение уже известных нам результатов (124). 3. Коэффициентные последовательности (126). 4. Алгебраическая подготовка к "формулам универсальных коэффициентов" (127). 5. Формулы универсальных коэффициентов (128). 6. Формула Кюннета (130).	
§ 16.	Умножения . . . . .	132
	1. Введение (132). 2. Прямое построение $\smile$ -умножения (134). 3. Определение $\times$ -умножения (135). 4. Применение: инвариант Хопфа (136). 5. Дополнение: другие умножения (138).	
§ 17.	Гомологии и многообразия. . . . .	139
	1. Гладкие многообразия (140). 2. Фундаментальный класс (143). 3. Изоморфизм Пуанкаре (144). 4. Индексы пересечения и двойственность Пуанкаре (146). 5. Применение: формулы Лефшеца (149). 6. Коэффициенты зацепления (151). 7. Обратные гомоморфизмы (153). 8. Связь с $\smile$ -умножением (155). 9. Обобщения изоморфизма и двойственности Пуанкаре (156).	
§ 18.	Теория препятствий . . . . .	160
	1. Препятствия к распространению непрерывного отображения (160). 2. Относительный случай (162). 3. Применение: когомологии и отображения в $K(\pi, n)$ 'ы (163). 4. Другое применение: теоремы Хопфа (165). 5. Препятствие к продолжению сечения (165).	
§ 19.	Векторные расслоения и характеристические классы . . . . .	167
	1. Векторные расслоения и операции над ними (167). 2. Касательные и нормальные расслоения гладких многообразий (170). 3. Ассоциированные рас-	

слоения и характеристические классы (171). 4. Характеристические классы и классифицирующие пространства (174). 5. Важнейшие свойства классов Штифеля – Уитни, Эйлера, Черна и Понтрягина (177). 6. Характеристические классы в топологии гладких многообразий (181).

### Глава 3. СПЕКТРАЛЬНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ РАССЛОЕНИЯ . . . . .

§ 20.	Спектральная последовательность, ассоциированная с фильтрацией . . . . .	
	1. Общие определения (187). 2. Общие теоремы (189). 3. Присоединенная градуированная группа (190). 4. Когомологический вариант теории Лере (191). 5. Графическое изображение спектральной последовательности (192). 6. Новое понимание клеточного вычисления гомологий (193). 7. Новое понимание гомологических последовательностей пар и троек (194). 8. Обобщение на бесконечные фильтрации (194).	
§ 21.	Спектральная последовательность расслоения . . . . .	1
	1. Вычисление начальных членов спектральной последовательности в предположении гомологической простоты расслоения (195). 2. Случай непростого расслоения (198). 3. Первые применения (200).	
§ 22.	Дополнительные свойства спектральных последовательностей расслоений . . . . .	21
	1. Гомоморфизмы спектральных последовательностей (203). 2. Нулевая строка и нулевой столбец (205). 3. Трансгрессия (206). 4. Применение: три точных последовательности (207). 5. Трансгрессия и характеристический класс (210).	
§ 23.	Мультипликативная структура в когомологической спектральной последовательности . . . . .	2
	1. Формулировки: свойства мультипликативной структуры (211). 2. Построение умножения (212). 3. Первое применение: когомологии группы $SU(n)$ (212). 4. Когомологии других классических групп (214). 5. Еще один пример (217).	
§ 24.	Метод Серра вычисления гомотопических групп . . . . .	21
	1. Когомологии пространств петель (219). 2. Метод убивающих пространств (220).	
§ 25.	Ранги гомотопических групп . . . . .	22
	1. Конечная порожденность и конечность гомотопических групп (222). 2. Вычисление колец $H^*(K(\pi, n); Q)$ (224). 3. Ранги гомотопических групп сфер (225). 4. Теорема Картана – Серра (227). 5. Комментарии к теореме Картана – Серра (229).	
§ 26.	Нечетные компоненты гомотопических групп . . . . .	23
	1. Когомологии $H^*(K(Z_{p^s}, n); Z_{p^t})$ при $(p, p^t) = 1$ (230). 2. Частичное вычисление кольца $H^*(K(Z_p, n); Z)$ (230). 3. Частичное вычисление когомологий $K(Z, n)$ (234). 4. Частичное вычисление $p$ -компонент гомотопических групп сфер (234).	

### Глава 4. КОГОМОЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ . . . . .

§ 27.	Общая теория . . . . .	238
	1. Определение (238). 2. Классификация (238). 3. Примеры (239). 4. Стабильные операции (240). 5. Алгебра стабильных операций (244).	238
§ 28.	Стинродовы квадраты . . . . .	244
	1. Введение (244). 2. Теорема существования и единственности $Sq^i$ (245). 3. Доказательство формулы Картана (247). 4. Другие конструкции стинродовых квадратов (249).	
§ 29.	Алгебра Стинрода . . . . .	250
	1. Строение алгебры Стинрода $A_2$ . Формулировки (250). 2. Теорема А. Бореля (251). 3. Теорема Ж.-П. Серра (253). 4. Устройство алгебры $A$ (254). 5. Соотношения (254). 6. Вычисление $\otimes_q \mathcal{S}^s(q, Z, Z_2)$ (256). 7. Алгебра Стинрода $\text{mod } p$ (257). 8. Другие классификационные теоремы (258).	
§ 30.	Применения стинродовых квадратов . . . . .	259
	1. Вычисление гомотопических групп (259). 2. Стинродовы квадраты и классы Штифеля – Уитни (261). 3. Вторые препятствия (264). 4. Несуществование сферойдов с нечетным инвариантом Хопфа (265). 5. Линзы (265).	

§ 31. Общая идея . . . . . 268  
 1. Введение (268). 2. Метод Серра и метод Адамса (269). 3. Спектральная последовательность (270).

§ 32. Необходимый алгебраический материал . . . . . 271  
 1. Модули (271). 2. Проективные модули (272). 3. Проективные резольвенты (273). 4. Tor и Ext (274).

§ 33. Построение спектральной последовательности . . . . . 275  
 1. Топологическая фильтрация Адамса (275). 2. Группы и дифференциалы спектральной последовательности (278). 3. Теорема Адамса (280). 4. Доказательство утверждений (1) и (2) (280). 5. Отступление: замечание о резольвентах (283). 6. Продолжение доказательства. Случай конечных стабильных гомотопических групп (284). 7. Дополнительные свойства спектральной последовательности Адамса (289). 8. Окончание доказательства теоремы Адамса в общем случае (291).

§ 34. Мультипликативные структуры . . . . . 293  
 1. Композиционное умножение в стабильных гомотопических группах сферы (294). 2. Алгебраическое отступление: алгебры Хопфа (296). 3. Алгебра Стиррода как алгебра Хопфа (297). 4. Умножение в спектральной последовательности Адамса (298).

§ 35. Применение спектральной последовательности Адамса к вычислению стабильных гомотопических групп сфер . . . . . 301  
 1. Аддитивная структура члена  $E_2$  (301). 2. Мультипликативная структура (307). 3. Нечетные компоненты (310). 4. Теоремы Адамса о начальном члене его спектральной последовательности (311). 5. Заключение (312).

§ 36. Частичные операции . . . . . 313  
 1. Построение частичных операций (313). 2. Частичные операции и второй дифференциал в спектральной последовательности Адамса (315). 3. Частичные операции и гомотопические группы сфер (316). 4. Системы Постникова (316).

§ 37. Общая теория . . . . . 318  
 1. Введение (318). 2. Определения (319). 3. Периодичность Ботта (324). 4. Характер Черна (329). 5. Экстраординарные гомологии и когомологии (331).

§ 38. Вычисление K-функтора: спектральная последовательность Атия – Хирцебруха 334  
 1. Построение спектральной последовательности Атия – Хирцебруха (334). 2. Примеры вычислений (338). 3. Дифференциалы спектральной последовательности Атия – Хирцебруха (340).

§ 39. Операции Адамса . . . . . 341  
 1. Определение и свойства (341). 2. Простое доказательство несуществования сферойдов с нечетным инвариантом Хопфа (Адамс – Атия) (345).

§ 40. J-функтор . . . . . 346  
 1. Определение и связь с гомотопическими группами сфер (346). 2. Гипотеза Адамса (350). 3. Применение к гомотопическим группам сфер (357).

§ 41. Теорема Римана – Роха . . . . . 360  
 1. Общая теорема Римана – Роха (360). 2. Теорема Римана – Роха в K-теории для комплексных расслоений (364). 3. Применение: вычисление  $e$ -инварианта (367). 4. Теорема Римана – Роха в K-теории для спинорных расслоений (369). 5. Первое применение: теоремы целочисленности (376). 6. Второе применение: теоремы невлиожимости (377). 7. Заключение: происхождение названия (379).

§ 42. Формула Атия – Зингера (набросок) . . . . . 380  
 1. Эллиптические операторы и их индексы (380). 2. Примеры (381). 3. Формула (383). 4. Снова примеры (383).

§ 43. Кобордизмы . . . . . 385  
 1. Определения (385). 2. Вычисления (391). 3. Связь с K-теорией (395). 4. Когомологические операции в кобордизмах и спектральная последовательность Адамса – Новикова (397).

Дополнение. ГОМОЛОГИИ В ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ. . . . .	401
§ 44. Гомологии и критические точки функций на многообразиях . . . . .	401
§ 45. Гомологии и точки бифуркации функции. Общие неравенства Морса . . . . .	405
§ 46. Гомологии и категория Люстерника – Шнирельмана . . . . .	407
§ 47. Гомологии и минимальные поверхности . . . . .	414
1. Физические границы раздела двух сред с равными давлениями и их математическая модель – минимальные поверхности (414). 2. Теорема Дугласа и Радо (416). 3. Абсолютно минимальные двумерные поверхности (420). 4. Трудности при решении задачи Плато в больших размерностях (421). 5. Гомологии и многомерные минимальные поверхности (422). 6. Элементы теории препятствий, встречающиеся в вариационных задачах (426). 7. Гомологически тривиальные минимальные поверхности (429).	
§ 48. Бордизмы и минимальные поверхности . . . . .	432
1. Старшие и младшие страты минимальных поверхностей (432). 2. Борданты многообразия и задача минимизации объема (434). 3. Решение задачи Плато в каждом классе спектральных бордизмов (437). 4. Минимальные поверхности в гомотопических классах отображений (438).	
§ 49. Некоторые топологические свойства минимальных поверхностей . . . . .	439
§ 50. Гомологии и периодические решения интегрируемых гамильтоновых систем . . . . .	442
§ 51. Теория типа Морса для интегрируемых гамильтоновых систем. Топологический инвариант интегрируемых систем . . . . .	446
§ 52. Когомологии и слоения . . . . .	466
1. Слоения (466). 2. Класс Годбийона – Вея (471). 3. Характеристические классы слоений произвольной коразмерности (477). 4. Отступление: алгебры Ли и их когомологии (479). 5. Когомологии алгебры Ли $W_q$ и характеристические классы оснащенных слоений коразмерности $q$ (482).	
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ДОПОЛНЕНИЮ . . . . .	485
ПРИЛОЖЕНИЕ. О РИСУНКАХ . . . . .	488
СПИСОК КНИГ ПО ТОПОЛОГИИ. . . . .	490
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ . . . . .	492