

Предисловие	8
ГЛАВА 1. ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР И ВВЕДЕНИЕ В КЛАССИЧЕСКУЮ ТЕОРИЮ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ	11
§ 1. У истоков многомерного вариационного исчисления	11
1.1. О работах Эйлера (12). 1.2. О работах Лагранжа и Монка (13).	
1.3. О работах Менье и Пуассона (17).	
§ 2. XIX век – эпоха открытия основных свойств минимальных поверхностей	18
2.1. Эксперименты Плато с мыльными пленками. Физические опыты с проволочными контурами. Пленки с границей и пленки без границы (пузыри) (18). 2.2. Механизм образования мыльных пленок и физические принципы, определяющие их свойства. Мыльная пленка как поверхность минимальной площади (20). 2.3. Поверхностное натяжение и форма капель жидкости. Физические опыты Бойля (22).	
2.4. Вторая квадратичная форма поверхности и средняя кривизна. Граница раздела двух сред, находящихся в равновесии, является поверхностью постоянной средней кривизны (24). 2.5. Теорема Пуассона (27). 2.6. Два типа мыльных пленок. Замкнутые пленки постоянной положительной кривизны. Пленки с границей, имеющие постоянную нулевую кривизну (30).	
§ 3. Топологические и физические свойства двумерных минимальных поверхностей	31
3.1. Устойчивые и неустойчивые минимальные поверхности (31).	
3.2. Опыты Плато по изучению устойчивости столба жидкости (32).	
3.3. Физическая реализация геликоида в виде мыльной пленки (36).	
3.4. Физическая реализация катеноида в виде мыльной пленки. Топологические перестройки катеноида при деформации граничного контура (38). 3.5. Общая задача исследования многозначного графика, описывающего значения функционала, вычисленного на его экстремалах. Характер зависимости минимальной поверхности от граничного контура (40). 3.6. Многозначная функция длин геодезических на римановых многообразиях (41). 3.7. Многозначная функция площадей минимальных поверхностей, возникающая при деформации граничного контура. Различные листы графика соответствуют устойчивым и неустойчивым минимальным поверхностям. Появление особенностей типа "ласточкин хвост" в теории минимальных поверхностей (42).	
§ 4. Четыре экспериментальных принципа Плато и их следствия для двумерных минимальных поверхностей	54
4.1. Минимальные поверхности в трехмерном пространстве и первый принцип Плато (54). 4.2. Функционал площади и функционал Дирихле (56). 4.3. Особые точки минимальных поверхностей и три последних принципа Плато (59). 4.4. Минимальные поверхности в живой природе. Скелеты радиолярий и сингулярные ребра минимальных пленок (62).	
§ 5. Двумерные минимальные поверхности в евклидовом пространстве и в римановом многообразии	64

5.1. Уравнение минимальной поверхности (64). 5.2. Минимальные поверхности и гармонические функции. Роль конформных координат. Представление Вейерштрасса (66). 5.3. Обобщенные минимальные поверхности (68). 5.4. Теоремы Дутласа и Радо. Решение классической проблемы Плато в классе образов двумерных многообразий с фиксированным краем. Дальнейшие обобщения (69). 5.5. Минимальные поверхности в R^3 . Гауссово отображение (79). 5.6. Минимальные поверхности в римановом пространстве (82).

ГЛАВА 2. СВЕДЕНИЯ О НЕКОТОРЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ФАКТАХ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В СОВРЕМЕННОЙ ТЕОРИИ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ 86

§ 1. Группы сингулярных и клеточных гомологий	86
§ 2. Группы когомологий.	87

ГЛАВА 3. СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕОРИИ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ 90

§ 1. Минимальные поверхности и гомологии	90
1.1. Вторая квадратичная форма подмногообразия в римановом пространстве (90). 1.2. Многомерные локально минимальные поверхности произвольной коразмерности. Первая вариация функционала объема подмногообразия (91). 1.3. Вторая вариация функционала объема (93). 1.4. Сопряженные границы. Индекс минимальной поверхности (93). 1.5. Минимальные подмногообразия в стандартной сфере (95). 1.6. Глобальная минимальность комплексных подмногообразий. Теорема Federera (96). 1.7. Комплексная проблема Плато (97). 1.8. О различных подходах к понятиям поверхности и границы поверхности. Различные варианты постановки проблемы Плато (98). 1.9. Гомологическая граница поверхности и роль группы коэффициентов группы гомологий. Решение проблемы Плато в классе гомологических поверхностей с фиксированной гомологической границей (100). 1.10. Примеры минимальных поверхностей, показывающие, что класс гомологических поверхностей и гомологических границ не охватывает весь класс устойчивых минимальных поверхностей, реализуемых в физических экспериментах (102). 1.11. Описание случаев, когда минимальная поверхность, затягивающая контур, не содержит в себе замкнутых "мыльных пузырей" (110).	
§ 2. Теория потоков и варифолдов	112
2.1. Классические потоки де Рама (112). 2.2. Спрямляемые потоки и плоские цепи (113). 2.3. Нормальные и интегральные потоки (114). 2.4. Различные формулировки теоремы существования минимальных потоков. Решение проблемы Плато в различных классах потоков (115). 2.5. Варифолды и минимальные поверхности (116). 2.6. Внутренняя регулярность минимальных поверхностей и структура их особых точек (118). 2.7. Регулярность почти всюду носителей, минимизирующих эллиптический интегrand k -потоков и k -варифолдов (118). 2.8. Внутренняя регулярность минимизирующих объем гиперповерхностей и существование минимальных конусов коразмерности один.(119).	
§ 3. Теория минимальных конусов и эквивариантная проблема Плато	120
3.1. Каждая сингулярная точка минимальной поверхности всегда определяет некоторый минимальный конус (120). 3.2. Многомерные минимальные конусы над подмногообразиями в стандартной сфере (121). 3.3. Минимальные поверхности, обладающие группами симметрий. Решение эквивариантной проблемы Плато (125). 3.4. Редукция эквивариантной проблемы Плато к задаче поиска кратчайшей геодезической на двумерной поверхности с краем. (127). 3.5. В евклидовом пространстве большой размерности существуют минимальные гиперповерхности, являющиеся графиками нелинейных функций (129).	

ГЛАВА 4. МНОГОМЕРНАЯ ПРОБЛЕМА ПЛАТО В КЛАССЕ ВСЕХ МНОГООБРАЗИЙ С ФИКСИРОВАННЫМ КРАЕМ

132

§ 1. Решение многомерной проблемы Плато в классе спектров отображений гладких многообразий с фиксированным краем. Аналог теорем Дугласа и Радо в случае произвольных римановых многообразий. Решение проблемы Плато в произвольном классе спектров замкнутых бордантных многообразий

1.1. Классическая постановка многомерной проблемы Плато эквивалентна минимизации объема подмногообразия в классе бордантных ему многообразий (132). 1.2. Простейшие свойства групп бордизмов (136). 1.3. Решение проблемы Плато в классе отображений спектра многообразий с фиксированной границей (140).

§ 2. Некоторые варианты проблемы Плато требуют для своей постановки понятий обобщенных гомологий и когомологий

2.1. Определение обобщенных гомологий и когомологий (142).

2.2. Общее понятие границы (или кограницы) поверхности, охватывающее все предыдущие определения (143). 2.3. Классы вариаций поверхностей (143). 2.4. Решение проблемы Плато в каждом классе поверхностей фиксированного топологического типа, задаваемого в терминах обобщенных гомологий или когомологий (144). 2.5. Краткая схема доказательства теоремы существования глобально минимальной поверхности (146).

§ 3. В некоторых случаях задача Дирихле для уравнения минимальной поверхности большой коразмерности не имеет решения

§ 4. Некоторые новые методы конструктивного построения глобально минимальных поверхностей в римановых многообразиях

4.1. Универсальная оценка снизу объемов топологически нетривиальных минимальных поверхностей (156). 4.2. Коэффициент деформации векторного поля (158). 4.3. Минимальные поверхности нетривиального топологического типа и наименьшего объема (158). 4.4. О минимальном объеме поверхностей, проходящих через центр симметричной выпуклой области в евклидовом пространстве (164). 4.5. Форма калибровки и минимальные поверхности (166).

ГЛАВА 5. МНОГОМЕРНЫЕ МИНИМАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ И ГАРМОНИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

171

§ 1. Многомерный функционал Дирихле и гармонические отображения. Проблема минимизации функционала Дирихле на гомотопическом классе данного отображения

1.1. Гармонические поверхности в многообразии отрицательной кривизны и связи с голоморфными отображениями (171). 1.2. Важный класс гармонических поверхностей – вполне геодезические поверхности в симметрических пространствах (172). 1.3. Когда вполне геодезическое подмногообразие реализует ненулевой цикл в объемлющем пространстве? (174). 1.4. Описание вполне геодезических и топологически нетривиальных циклов (176). 1.5. Описание вполне геодезических негомотопных нулю сфер в симметрических пространствах (178).

§ 2. Связи между топологией многообразий и свойствами гармонических отображений

2.1. Задача минимизации функционала Дирихле (179). 2.2. Минимизация функционалов типа Дирихле (184). 2.3. Априорная неустойчивость гармонических отображений (185). 2.4. Регулярность гармонических отображений (187).

§ 3. Некоторые нерешенные задачи

179

189

ГЛАВА 6. МНОГОМЕРНЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ И МУЛЬТИВАРИФОЛДЫ. РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ПЛАТО В ГОМОТОПИЧЕСКОМ КЛАССЕ ОТОБРАЖЕНИЯ МУЛЬТИВАРИФОЛДА

§ 1. Классические постановки	192
§ 2. Многомерные вариационные задачи	192
2.1. Классические постановки многомерных вариационных задач и классические многомерные задачи Плато (193). 2.2. Частичные вырождения у минимальных отображений (194). 2.3. Введение стратифицированных поверхностей и классическая постановка задачи Плато А на языке теории бордизмов (194). 2.4. Функционалы типа k -мерного объема (196).	193
§ 3. Функциональный язык мультивариофолдов	197
3.1. Определение мультивариофолда (197). 3.2. Структура мультивариофолда (199). 3.3. Массы и носители мультивариофолда (201). Спрямляемые мультивариофолды (202). 3.5. Интегrandы (204).	
§ 4. Постановка задач Б, Б' и Б'' на языке теории мультивариофолов	206
4.1. Переформулировка задач Б, Б', Б'' на языке мультивариофолов (206). 4.2. Формулировка и краткая схема доказательства основных теорем (208).	

ГЛАВА 7. ПРОСТРАНСТВО МУЛЬТИВАРИФОЛДОВ.

§ 1. Топология пространства мультивариофолов	209
1.1. Слабые топологии (209). 1.2. Произведение мультивариофолов (212).	209
§ 2. Локальные характеристики мультивариофолов	215
2.1. Касательное распределение мультивариофолов (215). 2.2. Плотности мультивариофолда (218).	
§ 3. Индуцированные отображения	220
3.1. Индуцированные отображения типа T_f (220). 3.2. Обобщение индуцированных отображений типа T_f (221). 3.3. Индуцированные отображения типа L_f (224). 3.4. Индуцированное отображение в по-точечном представлении мультивариофолов (225).	

ГЛАВА 8. ПАРАМЕТРИЗАЦИИ И ПАРАМЕТРИЗОВАННЫЕ МУЛЬТИВАРИФОЛДЫ

§ 1. Пространства параметризаций и параметризованных мультивариофолов	227
1.1. Определение параметризации (227). 1.2. Гомотопические классы (228). 1.3. Параметрическая метрика и топология (229).	227
§ 2. Структура пространств параметризаций и параметризованных мультивариофолов	233
2.1. Условие локально линейной связности для пространств параметризаций (233). 2.2. Топология гомотопических классов (235). 2.3. Основная структурная теорема (236).	
§ 3. Точные параметризации	242
3.1. Определения (242). 3.2. Сравнение точной и параметрической метрик (242). 3.3. Топология множеств точных параметризаций (244).	
§ 4. Вещественные и целочисленные мультивариофолды	246

ГЛАВА 9. ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ ОБОБЩЕННЫХ ИНТЕГРАНДОВ В КЛАССАХ ПАРАМЕТРИЗАЦИЙ И ПАРАМЕТРИЗОВАННЫХ МУЛЬТИВАРИФОЛДОВ. КРИТЕРИИ ГЛОБАЛЬНОЙ МИНИМАЛЬНОСТИ

§ 1. Теорема о деформации	248
1.1. Оценки мульти масс мультивариофолов при отображении (248). 1.2. Теорема о деформации (251).	248
§ 2. Изопериметрические неравенства	256

§ 3. Постановка вариационных задач в классах параметризаций и параметризованных мультивариофолов	260
3.1. Краевые условия (261). 3.2. Параметризации-решения и мультивариофолды-решения (261). 3.3. Вариационные классы (262).	
3.4. Формулировка общей вариационной задачи (263).	
§ 4. Существование и свойства минимальных параметризованных мультивариофолов	264
4.1. Полунепрерывность обобщенных интеграндов (264). 4.2. Теоремы существования минимальных решений (267). 4.3. Структура множества минимальных решений (269).	
ГЛАВА 10. КРИТЕРИИ ГЛОБАЛЬНОЙ МИНИМАЛЬНОСТИ	270
§ 1. Постановка задачи на функциональном языке потоков	270
1.1. Понятия глобально минимальных потоков (270). 1.2. Современный анализ классического алгоритма Гюйгенса (271). 1.3. Выпуклые функционалы и теоремы Хана–Банаха (272).	
§ 2. Обобщенные формы и их свойства	273
§ 3. Условия глобальной минимальности потоков	274
3.1. Современные "уравнение" Эйлера и алгоритм Гюйгенса (274).	
3.2. Выпуклый случай (277). 3.3. Случай интеграндов (278).	
§ 4. Глобально минимальные потоки в симметричных задачах	280
4.1. Задачи с инвариантными функционалами (280). 4.2. Задачи с ковариантно постоянными лагранжианами (284).	
§ 5. Конкретные примеры глобально минимальных потоков и поверхностей	287
5.1. Минимальные потоки на кэлеровых многообразиях (287). 5.2. Минимальные потоки на симметрических пространствах (288). 5.3. Понтрягинские циклы в группах Ли (291).	
Приложение. Объемы замкнутых минимальных поверхностей и связь с тензором кривизны объемлющего риманова пространства	294
Список литературы	296