

Глава 1. Примеры многообразий	6
§ 1. Понятие многообразия	6
1. Определение многообразия. (6). 2. Отображения многообразий; тензоры на многообразии. (9). 3. Вложения и погружения многообразий. Многообразия с краем. (12).	
§ 2. Простейшие примеры многообразий	13
1. Поверхности в евклидовом пространстве. Группы преобразований как многообразия. (13). 2. Проективные пространства. (17).	
§ 3. Необходимые сведения из теории групп Ли	20
1. Строение окрестности единицы группы Ли. Алгебра Ли группы. Полупростота. (20). 2. Понятие (линейного) представления. Пример нематричной группы Ли. (25).	
§ 4. Комплексные многообразия	27
1. Определения и примеры. (27). 2. Римановы поверхности как многообразия. (32).	
§ 5. Простейшие однородные пространства	34
1. Действие группы на многообразии. (34). 2. Примеры однородных пространств. (35).	
§ 6. Пространства постоянной кривизны (симметрические пространства)	38
1. Понятие симметрического пространства. (38). 2. Группа изометрий. Свойства ее алгебры Ли. (40). 3. Симметрические пространства 1-го и 2-го типов. (41). 4. Группы Ли как симметрические пространства. (43). 5. Построение симметрических пространств. Примеры. (44).	
§ 7. Линейные элементы и связанные с ними многообразия	47
1. Конструкции, связанные с касательными векторами. (47). 2. Нормальное расслоение к подмногообразию. (49).	
Глава 2. Вопросы обоснования. Необходимые сведения из теории функций. Типичные гладкие отображения	52
§ 8. Разбиение единицы и его применения	52
1. Разбиение единицы. (52). 2. Простейшие применения разбиения единицы. Интеграл по многообразию и формула Стокса. (55). 3. Инвариантные метрики. (59).	
§ 9. Реализация компактных многообразий как поверхностей в \mathbb{R}^N	61
§ 10. Некоторые свойства гладких отображений многообразий	61
1. Аппроксимация непрерывных отображений гладкими. (61). 2. Теорема Сарда. (63). 3. Трансверсальная регулярность. (66). 4. Функции Морса. (68).	
§ 11. Применения теоремы Сарда	71
1. Существование вложений и погружений. (71). 2. Построение функций Морса как функций высоты. (73). 3. Фокальные точки. (75).	

Глава 3. Степень отображения. Индекс пересечения. Их приложения	77
§ 12. Понятие гомотопии	77
1. Определение гомотопии. Аппроксимация отображений и гомотопий гладкими. (77). 2. Относительные гомотопии. (79).	
§ 13. Степень отображения	79
1. Определение степени. (79). 2. Общшения основного определения. (80). 3. Гомотопическая классификация отображений многообразия в сфере. (81). 4. Простейшие примеры. (82).	
§ 14. Некоторые применения степени	84
1. Степень и интеграл. (84). 2. Степень векторного поля на гиперповерхности. (85). 3. Число Уитни. Формула Гаусса—Бонне. (87). 4. Индекс особой точки векторного поля. (90). 5. Трансверсальная поверхность векторного поля. Теорема Пуанкаре—Бендиксона. (93).	
§ 15. Индекс пересечения и его применения	95
1. Определение индекса пересечения. (95). 2. Суммарная особенность векторного поля. (96). 3. Алгебраическое число неподвижных точек. Теорема Брауэра. (98). 4. Коэффициент зацепления. (99).	
Глава 4. Ориентируемость многообразий. Фундаментальная группа. Накрытия (расслоенные пространства с дискретным слоем)	101
§ 16. Ориентируемость и гомотопия замкнутых путей	101
1. Перенос ориентации вдоль пути. (101). 2. Примеры неориентируемых многообразий. (102).	
§ 17. Фундаментальная группа	103
1. Определение фундаментальной группы. (103). 2. Зависимость от начальной точки. (105). 3. Свободные гомотопические классы отображений окружности. (105). 4. Гомотопическая эквивалентность. (106). 5. Примеры. (107). 6. Фундаментальная группа и ориентируемость. (108).	
§ 18. Накрытие и накрывающая гомотопия	108
1. Определение и фундаментальные свойства накрытий. (108). 2. Простейшие примеры. Универсальное накрытие. (110). 3. Разветвленные накрытия. Римановы поверхности. (112). 4. Накрытия и дискретные группы преобразований. (114).	
§ 19. Накрытия и фундаментальная группа. Вычисление фундаментальной группы некоторых многообразий	114
1. Монодромия. (114). 2. Вычисление фундаментальной группы с помощью накрытий. (116). 3. Простейшая гомологическая группа. (118).	
§ 20. Дискретные группы движений плоскости Лобачевского	120
Глава 5. Гомотопические группы	131
§ 21. Определение абсолютных и относительных гомотопических групп. Примеры	131
1. Основные определения. (131). 2. Относительные гомотопические группы. Точная последовательность пары. (133).	
§ 22. Накрывающая гомотопия. Гомотопические группы накрытий и пространств петель	136
1. Понятие расслоения. (136). 2. Точная последовательность расслоения. (137). 3. Зависимость гомотопических групп от начальной точки. (139). 4. Случай групп Ли. (141). 5. Умножение Уайтхеда. (143).	
§ 23. Сведения о гомотопических группах сфер. Оснащенные многообразия. Инвариант Хопфа	145

1. Оснащенные многообразия и гомотопические группы сфер. (145).	
2. Надстройка. (148). 3. Вычисление групп $\pi_{n+1}(S^n)$. (150). 4. Группы $\pi_{n+2}(S^n)$. (151).	
Глава 6. Гладкие расслоения (косые произведения)	153
§ 24. Гомотопическая теория косых произведений	153
1. Понятие гладкого расслоения. (153). 2. Связность. (156). 3. Вычисление гомотопических групп с помощью расслоений. (158). 4. Классификация расслоений. (163). 5. Векторные расслоения и операции над ними. (166). 6. Мероморфные функции. (168). 7. Формула Пикара—Лэфшеца. (171).	
§ 25. Дифференциальная геометрия расслоений	173
1. G -связности в главных расслоениях. (173). 2. G -связности в ассоциированных расслоениях. Примеры. (177). 3. Кривизна. (180). 4. Характеристические классы. Конструкции. (184). 5. Характеристические классы. Перечисление. (189).	
§ 26. Узлы и зацепления. Косы	194
1. Группа узла. (194). 2. Полином Александера. (196). 3. Расслоение, связанное с узлом. (196). 4. Зацепления. (198). 5. Косы. (199).	
Глава 7. Некоторые примеры динамических систем и слоений на многообразиях	201
§ 27. Простейшие понятия качественной теории динамических систем. Двумерные многообразия	201
1. Основные определения. (201). 2. Динамические системы на торе. (204).	
§ 28. Гамильтоновы системы на многообразиях. Теорема Лиувилля. Примеры	207
1. Гамильтоновы системы в кокасательном расслоении. (207). 2. Гамильтоновы системы на многообразиях. Примеры. (208). 3. Геодезические потоки. (211). 4. Теорема Лиувилля. (212). 5. Примеры. (214).	
§ 29. Слоения	217
1. Основные определения. (217). 2. Примеры слоений коразмерности 1. (219).	
§ 30. Вариационные задачи с высшими производными. Гамильтоновы полевые системы	223
1. Гамильтонов формализм задач с высшими производными. (223). 2. Примеры. (226). 3. Гамильтонов формализм полевых систем. (228).	
Глава 8. Глобальная структура решений многомерных вариационных задач	235
§ 31. Некоторые многообразия общей теории относительности (ОТО)	235
1. Постановка задачи. (235). 2. Сферически симметричные решения. (236). 3. Аксиально симметричные решения. (242). 4. Космологические модели. (245). 5. Модели Фридмана. (247). 6. Анизотропные вакуумные модели. (250). 7. Более общие модели. (253).	
§ 32. Некоторые примеры глобальных решений уравнений Янга—Миллса. Киральные поля	257
1. Общие замечания. Решения типа монополей. (257). 2. Уравнение дуальности. (261). 3. Киральные поля. Интеграл Дирихле. (263).	
§ 33. Минимальность комплексных подмногообразий	271
Список литературы	275
Предметный указатель	276