Avant-propos 10

Chapitre premier. EXEMPLES DE VARIÉTÉS 11

§ 1. Notion de variété 11
1. Définition d'une variété 11
2. Applications de variétés; tenseurs sur une variété 15
3. Plongements et immersions de variétés. Les variétés à bord . . 18
§ 2. Quelques variétés élémentaires 19
1. Les surfaces dans l'espace euclidien. Groupes des transformations comme variétés 19
2. Espaces projectifs 24
§ 3. Quelques notions utiles de la théorie des groupes de Lie 28
1. Structure du voisinage du point unité d'un groupe de Lie. Algèbre de Lie du groupe. Semi-simplicité 28
2. Notion de représentation (linéaire). Exemple d'un groupe de Lie non matriciel. 34
§ 4. Variétés complexes 36
1. Définitions et exemples 36
2. Surfaces riemanniennes comme variétés 42
§ 5. Espaces homogènes élémentaires 46
1. Action d'un groupe sur une variété 46
2. Exemples d'espaces homogènes 47
§ 6. Les espaces à courbure constante (espaces symétriques) 51
1. Notion d'espace symétrique 51
2. Groupe d'isométrie; propriétés de son algèbre de Lie 53
3. Espaces symétriques des types 1 et 2 55
4. Les groupes de Lie comme espaces symétriques 56
5. Construction des espaces symétriques. Exemples 58
§ 7. Variétés engendrées par des éléments linéaires 63
1. Variétés construites sur des vecteurs tangents 63
2. Fibré normal à une sous-variété 65

Chapitre 2. QUESTIONS DE JUSTIFICATION. RAPPEL DES ÉLÉMENTS DE THÉORIE DES FONCTIONS. APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES TYPIQUES 68

§ 8. Partition de l'unité. Applications 68
1. Partition de l'unité 69
2. Quelques exemples de partition de l'unité. Intégration sur une variété et formule de Stokes 72
3. Métriques invariantes 77

§ 9. Réalisation de variétés compactes sous forme de surfaces dans $\mathbf{R}^N$ . . 79
§ 10. Propriétés des applications différentiables des variétés 80
1. Représentation approchée des applications continues par des applications différentiables 80
2. Lemme de Sard 82
3. Régularité transversale 86
4. Fonctions de Morse 89
§ 11. Applications du lemme de Sard 93
1. Existence des plongements et des immersions 93
2. Fonctions de Morse comme fonctions de la hauteur 96
3. Points focaux 98

Chapitre 3. DEGRÉ DE L'APPLICATION. INDICE D'INTERSECTION. APPLICATIONS DE CES NOTIONS 101
§ 12. Notion d'homotopie 101
1. Définition de l'homotopie. Possibilité de l'approximation différentiable 101
2. Homotopies relatives 103
§ 13. Degré de l'application. 104
1. Définition du degré. 104
2. Généralisations de la définition du degré 105
3. Classification homotopique des applications d'une variété dans une sphère 107
4. Quelques exemples élémentaires 108
§ 14. Ouelques applications du degré 111
1. Le degré et l'intégrale 111
2. Degré du champ de vecteurs sur une hypersurface 112
3. Nombre de Whitney. Formule de Gauss-Bonnet 115
4. Indice d'un point singulier du champ de vecteurs 119
5. Surface transversale d'un champ de vecteurs. Théorème de Poincaré-Bendixson 123
§ 15. Indice d'intersection et ses applications 126
1. Définition de l'indice d'intersection 126
2. Indice total des points singuliers d'un champ de vecteurs . . . 128
3. Nombre algébrique des points fixes. Théorème de Brouwer . . 130
4. Coefficient d'enlacement 132

Chapitre 4. VARIÉTÉS ORIENTABLES. GROUPE FONDAMENTAL. REVÊTEMENTS (ESPACES FIBRÉS DE FIBRE DISCRÈTE). . 135
§ 16. Variétés orientables. Homotopie des chemins fermés 135
1. Transport de l'orientation le long d'un chemin 135
2. Exemples de variétés non orientables 137
§ 17. Groupe fondamental 138
1. Définition du groupe fondamental 138
2. Influence du point de base 139
3. Classes d'homotopie libre d'applications d'un cercle 140
4. Equivalence d'homotopie 141
5. Exemples 143
6. Groupe fondamental et orientation des variétés 145
§ 18. Revêtement et relèvement des homotopies. 145
1. Définition et propriétés fondamentales des revêtements. . . . 145
2. Exemples élémentaires. Revêtement universel 147
3. Revêtements ramifiés. Surfaces riemanniennes 150
4. Revêtements et groupes discrets 152

§ 19. Revêtements et groupe fondamental. Calcul du groupe fondamental de certaines variétés 153
1. Monodromie 153
2. Calcul du groupe fondamental au moyen des revêtements . . . 156
3. Groupe d'homologie élémentaire 158
§ 20. Groupes discrets des déplacements du plan lobatchevskien 161

Chapitre 5. GROUPES D'HOMOTOPIE 178

§ 21. Définition des groupes d'homotopie absolus et relatifs. Exemples 178
1. Définitions fondamentales 178
2. Groupes d'homotopie relatifs. Suite exacte d'un couple 181
§ 22. Relèvement des homotopies. Groupes d'homotopie des revêtements et des espaces de lacets 184
1. Notion de fibration 184
2. Suite exacte d'une fibration 186
3. Dépendance des groupes d'homotopie par rapport au point de base 189
4. Cas des groupes de Lie 191
5. Multiplication de Whitehead 194
§ 23. Quelques notions sur les groupes d'homotopie des sphères. Variétés équipées. Invariant de Hopf 196
1. Variétés équipées et groupes d'homotopie des sphères 196
2. Suspension 201
3. Calcul des groupes $\pi_{n+1}(S^n)$ 202
4. Groupes $\pi_{n+2}(S^n)$ 204

Chapitre 6. FIBRÉS DIFFÉRENTIABLES 207

§ 24. Théorie homotopique des fibrés différentiables 207
1. Notion de fibré différentiable 207
2. Connexion. 211
3. Calcul des groupes d'homotopie à l'aide des fibrés 214
4. Classification des fibrés 220
5. Fibrés vectoriels et opérations sur ces fibrés 225
6. Fonctions méromorphes 227
7. Formule de Picard-Lefschetz 231
§ 25. Géométrie différentielle des fibrés différentiables 233
1. Les G-connexions dans les fibrés principaux 233
2. Exemples de G-connexions dans les fibrés associés 238
3. Courbure 242
4. Classes caractéristiques. Constructions 247
5. Classes caractéristiques. Enumération. 254
§ 26. Nœuds et enlacements. Tresses 261
1. Groupe d'un nœud 261
2. Polynôme d'Alexander 264
3. Fibré associé au nœud 265
4. Enlacements 267
5. Tresses 268

Chapitre 7. QUELQUES EXEMPLES DE SYSTÈMES DYNAMIQUES ET DE FEUILLETAGES SUR LES VARIÉTÉS 271

§ 27. Eléments de théorie qualitative des systèmes dynamiques. Variétés bidimensionnelles 271
1. Définitions fondamentales 271
2. Systèmes dynamiques sur un tore 274

§ 28. Systèmes de Hamilton sur les variétés. Théorème de Liouville. Exemples 279
1. Systèmes de Hamilton sur le fibré cotangent 279
2. Systèmes de Hamilton sur les variétés symplectiques. Exemples . 281
3. Flots géodésiques 283
4. Théorème de Liouville 285
5. Exemples 287
§ 29. Feuilletages 291
1. Définitions fondamentales 291
2. Quelques exemples de feuilletages de codimension 1 295
§ 30. Problèmes variationnels aux dérivées d'ordre supérieur 300
1. Formalisme de Hamilton 300
2. Exemples 303
3. Intégration des équations de commutativité. Analogie avec le problème de S. Kovalevskaïa. Potentiels périodiques à un nombre fini de zones 306
4. L'équation de Korteweg-de Vries est un système de Hamilton de dimension infinie 310

Chapitre 8. STRUCTURE GLOBALE DES SOLUTIONS DES PROBLÈMES VARIATIONNELS À DIMENSIONS MULTIPLES 313

§ 31. Quelques variétés de la Relativité générale 313
1. Position du problème 313
2. Solutions à symétrie sphérique 314
3. Solutions à symétrie axiale 323
4. Modèles cosmologiques 327
5. Modèles de Friedmann 329
6. Modèles anisotropes dans le vide 333
7. Modèles plus généraux 337
§ 32. Quelques exemples de solutions globales d'équations de Yang-Mills. Champs chiraux 342
1. Considérations générales. Solutions monopoles 342
2. Equation de dualité 347
3. Champs chiraux. Intégrale de Dirichlet 351
§ 33. Minimalité des sous-variétés complexes 360

Bibliographie 365

Index 368