

Chapitre premier. GÉOMÉTRIE DANS UN DOMAINE DE L'ESPACE.

NOTIONS FONDAMENTALES . . . . . 15

- § 1. Systèmes de coordonnées . . . . . 15
  - 1. Coordonnées cartésiennes dans l'espace . . . . . 15
  - 2. Changement de coordonnées . . . . . 17
- § 2. Espace euclidien . . . . . 22
  - 1. La courbe dans l'espace euclidien . . . . . 22
  - 2. Formes quadratiques et vecteurs. . . . . 28
- § 3. Espaces riemanniens et pseudoriemanniens . . . . . 31
  - 1. Métrique riemannienne . . . . . 31
  - 2. Métrique de Minkowski . . . . . 34
- § 4. Groupes des transformations élémentaires de l'espace euclidien. . . . . 37
  - 1. Groupes des transformations d'un domaine . . . . . 37
  - 2. Transformations du plan . . . . . 38
  - 3. Déplacements de l'espace euclidien à trois dimensions . . . . . 45
  - 4. Autres groupes de transformations. . . . . 48
- § 5. Formules de Frenet . . . . . 51
  - 1. Courbure des courbes planes . . . . . 51
  - 2. Courbes gauches. Courbure et torsion . . . . . 56
  - 3. Transformations orthogonales dépendant du paramètre. . . . . 60
- § 6. Espaces pseudo-euclidiens . . . . . 63
  - 1. Rappel des éléments de la Relativité restreinte . . . . . 63
  - 2. Transformations de Lorentz . . . . . 65

Chapitre 2. THÉORIE DES SURFACES . . . . . 73

- § 7. Géométrie sur une surface dans l'espace . . . . . 73
  - 1. Les coordonnées sur la surface . . . . . 73
  - 2. Plan tangent. . . . . 76
  - 3. La métrique sur la surface . . . . . 78
  - 4. Aire de la surface . . . . . 81
- § 8. Deuxième forme fondamentale . . . . . 86
  - 1. Courbure des courbes sur la surface dans l'espace euclidien . . . . . 86
  - 2. Invariants d'un couple de formes quadratiques . . . . . 88
  - 3. Propriétés de la deuxième forme fondamentale . . . . . 90
- § 9. Métrique de la sphère . . . . . 95
- § 10. Surfaces spatiales dans l'espace pseudo-euclidien . . . . . 98
  - 1. Pseudosphère . . . . . 98
  - 2. Courbure des surfaces spatiales dans  $R_1^3$  . . . . . 101

§ 11. Le langage des nombres complexes en géométrie . . . . .	102
1. Coordonnées complexes et réelles . . . . .	102
2. Produit scalaire hermitien . . . . .	104
3. Exemples de groupes de transformations complexes . . . . .	106
§ 12. Fonctions analytiques . . . . .	107
1. Notation complexe de l'élément de longueur et de la différentielle d'une fonction . . . . .	107
2. Changement complexe de coordonnées . . . . .	110
3. Les surfaces dans l'espace complexe . . . . .	113
§ 13. Représentation conforme des métriques de surfaces . . . . .	115
1. Coordonnées isothermes. Courbure totale en coordonnées conformes . . . . .	115
2. Représentation conforme des métriques de la sphère et du plan lobatchevskien . . . . .	120
3. Surfaces à courbure constante . . . . .	123
§ 14. Groupes de transformations comme surfaces dans l'espace de dimension $N$ . . . . .	125
1. Coordonnées dans le voisinage de l'unité . . . . .	125
2. Application exp d'une matrice . . . . .	131
3. Quaternions . . . . .	134
§ 15. Transformations conformes des espaces euclidiens et pseudo-euclidiens multidimensionnels . . . . .	139
<b>Chapitre 3. LES TENSEURS. THÉORIE ALGÈBRIQUE . . . . .</b>	<b>147</b>
§ 16. Exemples de tenseurs . . . . .	1
§ 17. Définition générale d'un tenseur . . . . .	153
1. Loi de transformation des composantes des tenseurs de rang quelconque . . . . .	153
2. Opérations algébriques sur les tenseurs . . . . .	159
§ 18. Tenseurs de type $(0, k)$ . . . . .	163
1. Notation différentielle des tenseurs à indices inférieurs . . . . .	163
2. Tenseurs alternés de type $(0, k)$ . . . . .	165
3. Produit extérieur de deux formes différentielles. Algèbre extérieure. . . . .	167
§ 19. Tenseurs dans l'espace riemannien et pseudoriemannien . . . . .	169
1. Indices remontés et descendus . . . . .	169
2. Valeurs propres d'une forme quadratique . . . . .	170
3. L'opérateur* . . . . .	172
4. Tenseurs dans l'espace euclidien . . . . .	172
§ 20. Groupes cristallographiques et sous-groupes finis du groupe des rotations du plan et de l'espace. Exemples de tenseurs invariants. . . . .	173
§ 21. Tenseurs de rang 2 dans l'espace pseudo-euclidien et leurs valeurs propres . . . . .	195
1. Tenseurs alternés. Invariants du champ électromagnétique. . . . .	195
2. Tenseurs symétriques et valeurs propres. Tenseur d'énergie-impulsion du champ électromagnétique . . . . .	199
§ 22. Effet d'une application sur les tenseurs . . . . .	202
1. Opération générale de restriction des tenseurs à indices inférieurs . . . . .	202
2. Application des espaces tangents . . . . .	203
§ 23. Champs de vecteurs . . . . .	204
1. Groupes des difféomorphismes à un paramètre . . . . .	204
2. Dérivée de Lie. Exemples . . . . .	205

§ 24. Algèbres de Lie . . . . .	210
1. Algèbres de Lie et champs de vecteurs . . . . .	210
2. Principales algèbres de Lie matricielles . . . . .	211
3. Champs de vecteurs linéaires . . . . .	216
4. Métrique de Killing . . . . .	220
5. Classification des algèbres de Lie à trois dimensions . . . . .	222
6. Algèbre de Lie du groupe conforme . . . . .	223

#### Chapitre 4. CALCUL DIFFÉRENTIEL SUR LES TENSEURS . . . . . 229

§ 25. Calcul différentiel sur les tenseurs alternés . . . . .	229
1. Gradient d'un tenseur alterné . . . . .	229
2. Différentielle extérieure d'une forme . . . . .	232
§ 26. Tenseurs alternés et théorie d'intégration . . . . .	237
1. Intégration des formes différentielles . . . . .	237
2. Exemples des formes différentielles . . . . .	243
3. Formule générale de Stokes. Exemples . . . . .	248
4. Démonstration de la formule générale de Stokes pour le cube . . . . .	256
§ 27. Formes différentielles dans les espaces complexes . . . . .	259
1. Opérateurs $d'$ et $d''$ . . . . .	259
2. Métrique kählérienne. Forme de courbure . . . . .	261
§ 28. Dérivation covariante . . . . .	264
1. Connexion euclidienne . . . . .	264
2. Dérivation covariante des tenseurs de rang quelconque . . . . .	272
§ 29. Dérivation covariante et la métrique . . . . .	276
1. Transport parallèle des champs de vecteurs . . . . .	276
2. Les géodésiques . . . . .	279
3. Connexions associées à la métrique . . . . .	280
4. Connexions associées à la structure complexe . . . . .	283
§ 30. Tenseur de courbure . . . . .	287
1. Tenseur de courbure général . . . . .	287
2. Symétries du tenseur de courbure. Tenseur de courbure engendré par la métrique . . . . .	290
3. Exemples: tenseur de courbure des espaces à deux et à trois dimensions, tenseur de courbure de la métrique de Killing. . . . .	292
4. Equations de Peterson-Codazzi. Surfaces à courbure constante négative et équation «sin-Gordon» . . . . .	298

#### Chapitre 5. ÉLÉMENTS DE CALCUL DES VARIATIONS . . . . . 302

§ 31. Problèmes aux variations à une dimension . . . . .	302
1. Equations d'Euler-Lagrange . . . . .	302
2. Quelques exemples de fonctionnelles . . . . .	306
§ 32. Lois de conservation . . . . .	310
1. Groupes de transformations conservant le problème aux variations . . . . .	310
2. Quelques exemples. Application des lois de conservation . . . . .	311
§ 33. Formalisme hamiltonien . . . . .	321
1. Transformation de Legendre . . . . .	321
2. Repères mobiles . . . . .	324
3. Principes de Maupertuis et de Fermat. Applications . . . . .	328
§ 34. Théorie géométrique de l'espace de phases . . . . .	331
1. Systèmes de gradient . . . . .	331
2. Crochet de Poisson . . . . .	334
3. Transformations canoniques . . . . .	340
§ 35. Surfaces de Lagrange . . . . .	343
1. Faisceaux de trajectoires et équation de Hamilton-Jacobi . . . . .	343
2. Cas des hamiltoniens homogènes du premier ordre en $p$ . . . . .	347

§ 36. Seconde variation pour l'équation des géodésiques . . . . .	350
1. Formule de la seconde variation . . . . .	350
2. Points associés et condition du minimum . . . . .	354
<b>Chapitre 6. PROBLÈMES AUX VARIATIONS À DIMENSIONS MULTIPLES. LES CHAMPS ET LEURS INVARIANTS GÉOMÉTRIQUES . . . . .</b>	<b>357</b>
§ 37. Problèmes élémentaires aux variations à dimensions multiples . . . . .	357
1. Equations d'Euler-Lagrange . . . . .	357
2. Tenseur d'énergie-impulsion . . . . .	361
3. Equations du champ électromagnétique . . . . .	366
4. Equations du champ de gravitation . . . . .	372
5. Surfaces minimales («films de savon») . . . . .	379
6. Equations d'équilibre d'une plaque mince . . . . .	385
§ 38. Quelques exemples de lagrangiens . . . . .	392
§ 39. Eléments de la Relativité générale . . . . .	395
§ 40. Représentation spinorielle des groupes $SO(3)$ et $O(3,1)$ . Equation de Dirac et ses propriétés . . . . .	411
1. Automorphismes d'une algèbre de matrices . . . . .	411
2. Représentation spinorielle du groupe $SO(3)$ . . . . .	412
3. Représentation spinorielle du groupe de Lorentz . . . . .	414
4. Equation de Dirac . . . . .	418
5. Equation de Dirac dans le champ électromagnétique. Opérateur de passage à la charge conjuguée . . . . .	419
§ 41. Dérivation covariante des champs à symétrie quelconque . . . . .	420
1. Transformations de jauge. Lagrangiens invariants de jauge . . . . .	420
2. Forme de courbure . . . . .	424
3. Quelques exemples . . . . .	425
§ 42. Exemples de fonctionnelles invariantes de jauge. Equations de Maxwell et de Yang-Mills. Fonctionnelles à dérivée variationnelle identiquement nulle (classes caractéristiques) . . . . .	429
Index alphabétique des matières . . . . .	435