

<b>Предисловие</b> . . . . .	8
------------------------------	---

<b>ГЛАВА 1. Основные понятия</b> . . . . .	11
--	----

1.1. Линейная симплектическая геометрия . . . . .	11
1.2. Симплектические и пуассоновы многообразия . . . . .	15
1.3. Теорема Дарбу . . . . .	22
1.4. Вложения и погружения симплектических многообразий. Симплектические и лагранжевы подмногообразия . . . . .	25
1.5. Интегрируемые по Лиувиллю гамильтоновы системы. Теорема Лиувилля . . . . .	27
1.6. Нерезонансные и резонансные системы . . . . .	35
1.7. Число вращения . . . . .	35
1.8. Отображение момента интегрируемой системы и его бифуркационная диаграмма . . . . .	38
1.9. Простой пример интегрируемой механической системы . . . . .	40
1.10. Невырожденные точки отображения момента . . . . .	42
1.10.1. Случай двух степеней свободы . . . . .	42
1.10.2. Интегралы Ботта с точки зрения четырехмерного симплектического многообразия . . . . .	46
1.10.3. Определение невырожденной особенности в случае многих степеней свободы . . . . .	54
1.10.4. Типы невырожденных особенностей в многомерном случае . . . . .	57
1.11. Основные типы эквивалентностей динамических систем . . . . .	63

<b>ГЛАВА 2. Топология слоений, порождаемых функциями Морса на двумерных поверхностях</b> . . . . .	66
--	----

2.1. Простые функции Морса . . . . .	66
2.2. Граф Роба функции Морса . . . . .	67
2.3. Понятие атома . . . . .	69
2.4. Простые атомы . . . . .	71
2.4.1. Случай минимума и максимума. Атом $A$ . . . . .	71
2.4.2. Случай ориентируемого седла. Атом $B$ . . . . .	72
2.4.3. Случай неориентируемого седла. Атом $\bar{B}$ . . . . .	72
2.4.4. Классификация простых атомов . . . . .	74
2.5. Простые молекулы . . . . .	75
2.5.1. Определение простой молекулы . . . . .	75
2.5.2. Теорема реализации . . . . .	76
2.5.3. Примеры простых функций Морса и простых молекул . . . . .	77

2.5.4.	Классификация минимальных простых функций Морса на поверхностях малого рода . . . . .	80
2.6.	Сложные атомы . . . . .	83
2.7.	Классификация атомов . . . . .	86
2.7.1.	Склеивка атомов из крестов . . . . .	86
2.7.2.	Алгоритм построения полного списка всех атомов . . . . .	87
2.7.3.	Алгоритм распознавания одинаковых атомов . . . . .	87
2.7.4.	Задание атома в виде $f$ -графа . . . . .	89
2.7.5.	Задание ориентированного атома в виде некоторой подгруппы в группе $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$ . . . . .	93
2.7.6.	Изображение атомов в виде погружений графов в плоскость . . . . .	96
2.7.7.	Атомы как клеточные разбиения двумерных замкнутых поверхностей . . . . .	97
2.7.8.	Таблица атомов малой сложности . . . . .	98
2.7.9.	Зеркальные атомы . . . . .	99
2.8.	Группы симметрий ориентированных атомов и универсальное накрывающее дерево . . . . .	100
2.8.1.	Симметрии $f$ -графов . . . . .	100
2.8.2.	Универсальное накрывающее дерево над $f$ -графами. $f$ -граф как фактор-пространство универсального дерева . . . . .	101
2.8.3.	Соответствие между $f$ -графами и подгруппами в группе $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$ . . . . .	104
2.8.4.	Граф $J$ . Группы симметрий $f$ -графа и его связь с самим $f$ -графом. Максимально симметричные $f$ -графы . . . . .	106
2.8.5.	Список плоских максимально симметричных атомов. Примеры максимально симметричных атомов произвольного рода . . . . .	110
2.8.6.	Представление атомов в виде факторов плоскости Лобачевского по подгруппам ее группы изометрий. Атомы как поверхности постоянной отрицательной кривизны . . . . .	118
2.9.	Общее понятие молекулы . . . . .	122
2.10.	Примеры сложных функций Морса и сложных молекул . . . . .	127
2.11.	Аппроксимация сложных молекул простыми. Деформации функций Морса . . . . .	129
2.12.	Классификация потоков Морса–Смейла на двумерных поверхностях при помощи атомов и молекул . . . . .	134
<b>Таблицы к главе 2 . . . . .</b>		<b>138</b>
<b>ГЛАВА 3. Грубая лиувиллева эквивалентность интегрируемых систем с двумя степенями свободы . . . . .</b>		
3.1.	Классификация невырожденных критических подмногообразий на изоэнергетических 3-поверхностях . . . . .	148
3.2.	Топологическое строение окрестности особого слоя слоения Лиувилля . . . . .	153

3.3. Топологически устойчивые гамильтоновы системы . . . . .	160
3.4. Пример неустойчивой интегрируемой системы . . . . .	164
3.5. 2-атомы и 3-атомы . . . . .	165
3.6. Классификация 3-атомов . . . . .	170
3.7. Атомы как перестройки торов Лиувилля . . . . .	172
3.8. Молекулы интегрируемой системы . . . . .	173
3.9. Сложность интегрируемых систем . . . . .	176
<b>Таблицы к главе 3</b> . . . . .	178
<b>ГЛАВА 4. Лиувиллева эквивалентность интегрируемых систем с двумя степенями свободы</b> . . . . .	182
4.1. Допустимые системы координат на границе 3-атома . . . . .	182
4.2. Матрицы склейки и избыточные оснащения молекулы . . . . .	189
4.3. Инварианты, числовые метки $r, \epsilon, n$ . . . . .	190
4.3.1. Метки $r_i$ и $\epsilon_i$ . . . . .	191
4.3.2. Метки $n_k$ и семьи в молекуле . . . . .	191
4.4. Меченая молекула — полный инвариант лиувиллевой эквивалентности . . . . .	193
4.5. Влияние ориентаций . . . . .	195
4.5.1. Изменение ориентации на ребре молекулы . . . . .	195
4.5.2. Изменение ориентации 3-многообразия $Q$ . . . . .	196
4.5.3. Изменение ориентации гамильтонова векторного поля . . . . .	197
4.6. Теорема реализации . . . . .	197
4.7. Простые примеры молекул . . . . .	200
4.8. Гамильтоновы системы с критическими бутылками Клейна . . . . .	207
4.9. Топологические препятствия к интегрируемости гамильтоновых систем с двумя степенями свободы . . . . .	211
4.9.1. Класс $(M)$ . . . . .	211
4.9.2. Класс $(H)$ . . . . .	212
4.9.3. Класс $(Q)$ трехмерных многообразий, склеенных из блоков двух типов . . . . .	212
4.9.4. Класс $(W)$ многообразий Вальдхаузена (граф-многообразий) . . . . .	213
4.9.5. Класс $(H')$ многообразий, отвечающих интегрируемым гамильтонианам с ручными интегралами . . . . .	214
4.9.6. Теорема о совпадении четырех классов многообразий . . . . .	215
4.9.7. Доказательство теоремы 4.3 . . . . .	216
<b>ГЛАВА 5. Траекторная классификация интегрируемых систем с двумя степенями свободы. Первый шаг</b> . . . . .	218
5.1. Функция вращения системы на ребре молекулы. Вектор вращения . . . . .	218
5.2. Редукция трехмерной траекторной классификации к двумерной классификации с точностью до сопряженности . . . . .	222
5.2.1. Трансверсальные сечения . . . . .	222
5.2.2. Поток Пуанкаре и гамильтониан Пуанкаре . . . . .	224
5.3. Редукция двух степеней свободы к одной . . . . .	227

5.4. Общая концепция построения траекторных инвариантов интегрируемых гамильтоновых систем . . . . .	230
<b>ГЛАВА 6. Классификация гамильтоновых потоков на двумерных поверхностях с точностью до топологической сопряженности . . . . .</b>	<b>233</b>
6.1. Инварианты гамильтоновой системы на 2-атоме . . . . .	233
6.1.1. $\Lambda$ -инвариант . . . . .	233
6.1.2. $\Delta$ -инвариант и $Z$ -инвариант . . . . .	239
6.2. Теорема классификации гамильтоновых потоков на 2-атомах с точностью до топологической сопряженности . . . . .	244
6.3. Теорема классификации гамильтоновых потоков на 2-атомах с инволюцией с точностью до топологической сопряженности . . . . .	248
6.4. Операция вклейки-вырезания . . . . .	250
6.5. Описание области значений $\Delta$ - и $Z$ -инвариантов . . . . .	257
6.6. Теорема классификации гамильтоновых систем на замкнутой поверхности с точностью до топологической сопряженности . . . . .	270
<b>ГЛАВА 7. Гладкая сопряженность гамильтоновых потоков на двумерных поверхностях . . . . .</b>	<b>273</b>
7.1. Построение гладких инвариантов на 2-атомах . . . . .	273
7.2. Теорема классификации гамильтоновых потоков на 2-атомах с точностью до гладкой сопряженности . . . . .	281
<b>ГЛАВА 8. Траекторная классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Второй шаг . . . . .</b>	<b>286</b>
Введение . . . . .	286
8.1. Избыточное $t$ -оснащение молекулы (топологический случай). Основная лемма о $t$ -оснащениях . . . . .	287
8.2. Группа замен трансверсальных сечений. Операция вклейки-вырезания . . . . .	294
8.3. Действие группы замен $G\mathbb{P}$ на множестве избыточных оснащений . . . . .	298
8.4. Три общих принципа построения инвариантов . . . . .	300
8.5. Допустимые избыточные оснащения и их реализация . . . . .	301
8.5.1. Реализация оснащения на атоме . . . . .	301
8.5.2. Реализация оснащения на ребре молекулы . . . . .	305
8.5.3. Реализация избыточного $t$ -оснащения на всей молекуле . . . . .	308
8.6. Построение траекторных инвариантов в топологическом случае. Определение $t$ -молекулы . . . . .	311
8.6.1. $R$ -инвариант и индекс вращения на ребре . . . . .	311
8.6.2. $b$ -инвариант (на радикалах молекулы) . . . . .	313
8.6.3. $\tilde{\Lambda}$ -инвариант . . . . .	316
8.6.4. $\tilde{\Delta Z}[\theta]$ -инвариант . . . . .	316
8.6.5. Окончательное определение $t$ -молекулы интегрируемой системы . . . . .	318
8.6.6. Влияние ориентации на инварианты . . . . .	320

8.7. Теорема топологической траекторной классификации интегрируемых систем с двумя степенями свободы . . . . .	322
8.8. Частный случай: простые интегрируемые системы и их топологическая траекторная классификация . . . . .	328
8.9. Теория гладкой траекторной классификации . . . . .	329
<b>ГЛАВА 9. Лиувиллева классификация интегрируемых систем с двумя степенями свободы в четырехмерных окрестностях особых точек . . . . .</b>	<b>337</b>
9.1. <i>L</i> -тип четырехмерной особенности . . . . .	337
9.2. Круговая молекула четырехмерной особенности . . . . .	342
9.3. Случай центр-центр . . . . .	344
9.4. Случай центр-седло . . . . .	345
9.5. Случай седло-седло . . . . .	350
9.5.1. Структура особого слоя . . . . .	350
9.5.2. <i>Cl</i> -тип особенности . . . . .	355
9.5.3. Список особенностей типа седло-седло малой сложности . . . . .	358
9.6. Представление четырехмерной особенности типа седло-седло как почти прямого произведения двумерных атомов . . . . .	362
9.7. Доказательства теорем 9.3 и 9.4 . . . . .	371
9.8. Случай особенности типа фокус-фокус . . . . .	373
9.8.1. Структура особого слоя типа фокус-фокус . . . . .	373
9.8.2. Классификация особенностей типа фокус-фокус . . . . .	375
9.8.3. Модельный пример особенности типа фокус-фокус и теорема реализации . . . . .	379
9.8.4. Круговая молекула и группа монодромии особенности типа фокус-фокус . . . . .	381
9.9. Представление многомерных невырожденных особенностей слоев Лиувилля в виде почти прямых произведений . . . . .	386
<b>Таблицы к главе 9 . . . . .</b>	<b>395</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>416</b>